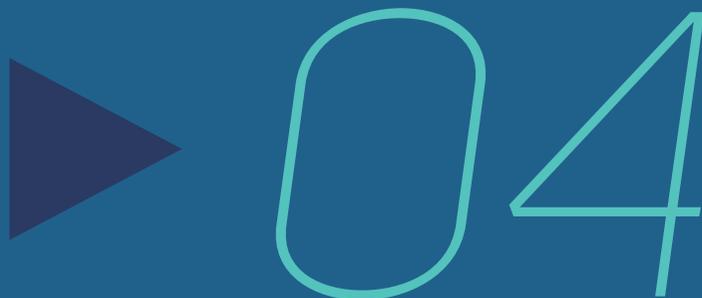


IL RISPARMIO

Anno LXXII - n. 4 Ottobre - Dicembre 2024

Rivista trimestrale di Acri

Associazione di Fondazioni e di Casse di Risparmio Spa



REGOLAMENTO PER LA SOTTOMISSIONE DEI MANOSCRITTI PER LA PUBBLICAZIONE NELLA RIVISTA IL RISPARMIO

1. PREMESSA

L'invio dei manoscritti alla Rivista per una valutazione ai fini della pubblicazione, presuppone l'accettazione da parte degli autori delle regole di pubblicazione di seguito esposte.

In particolare, gli autori devono:

- 00 dichiarare che il proprio manoscritto, o parti significative di esso, non sia stato pubblicato altrove;
- 00 dichiarare che il proprio manoscritto non sia sotto *review* per altra pubblicazione;
- 00 dichiarare che il proprio manoscritto non sarà inviato per altra pubblicazione prima della risposta finale del Comitato Scientifico sull'esito del processo di referaggio.

2. SOTTOMISSIONE MANOSCRITTI

Gli articoli vanno inviati al Comitato Scientifico via mail all'indirizzo elisabetta.boccia@acri.it in formato testo che includa il testo, le note e la bibliografia da pubblicare, corredati da un *Abstract* in italiano e in inglese di non più di 300 parole, indicando il codice JEL, disponibile su <http://www.aeaweb.org/journal/elclasjn.html>.

L'autore può proporre il suo lavoro per la pubblicazione in lingua inglese. Rimarrà a cura dell'autore la revisione del lavoro in lingua inglese qualora esso non venga considerato adeguato agli *standard* linguistici.

Sulla prima pagina del manoscritto va specificata l'Università o Ente di appartenenza, un numero telefonico e un indirizzo di posta elettronica dell'autore (o di almeno un autore nel caso di saggi a firma congiunta).

Il manoscritto deve essere formattato secondo quanto stabilito nella sezione "note per gli autori", pubblicata sul sito della rivista www.ilrisparmioreview.it.

3. PROCESSO DI REFERAGGIO

Il Comitato Scientifico esamina il manoscritto e, qualora lo giudichi potenzialmente idoneo per la pubblicazione nella Rivista, lo invia a tre *referee* per un triplo referaggio anonimo.

- 00 La decisione iniziale del Comitato Scientifico richiede circa due settimane.
- 00 La stesura dei rapporti dei *referee* richiede circa 1 mese.

Sulla base delle indicazioni dei *referee*, il Comitato Scientifico accetta l'articolo, richiede una revisione, oppure rifiuta l'articolo; in ogni caso verrà fornito agli autori un *feedback*.

In caso di accettazione da parte del Comitato Scientifico, si autorizzerà la pubblicazione e la stampa del lavoro assegnando, inoltre, il numero della rivista e l'anno in cui sarà pubblicato.

La fase di correzione delle bozze e di stampa del lavoro richiede circa 1 mese.

4. VARIE

Il Comitato Scientifico si aspetta che gli autori che inviano i propri manoscritti alla Rivista siano disponibili ad accettare di collaborare come *referee* nel caso in cui venga presentata loro tale richiesta.

Gli articoli pubblicati sul Risparmio saranno segnalati nelle bibliografie ECONLIT e EJEL.

IL RISPARMIO

Editor

Nicola Mattoscio (University of Chieti-Pescara)

Administrative Editor

Giorgio Righetti (ACRI, Rome)

Editorial Board

Gino Gandolfi (University of Parma)

Adriano Giannola (University of Naples "Federico II")

Valentino Larcinese (London School of Economics)

Antonio Patuelli (ABI, Rome)

Dominick Salvatore (Fordham University of New York)

Pasquale Lucio Scandizzo (University of Rome "Tor Vergata")

*"Il Risparmio Review" is included in JEL on CD, e-JEL and Econlit,
the electronic indexing and abstracting service
of the American Economic Association*

Redazione

Via del Corso, 267 - 00186 Roma

Tel. 06 68184387 - Fax 06 68184223

elisabetta.boccia@acri.it

www.ilrisparmioreview.it

www.acri.it

Codice ISSN 0053-5615 (print)

Codice ISSN 1971-9515 (online)

Le opinioni espresse negli articoli firmati o siglati
impegnano unicamente la responsabilità dei rispettivi Autori.
La produzione dei testi è consentita, purché ne venga citata la fonte.

INDICE

IL RILANCIO DELLA CARTOLARIZZAZIONE

THE RELAUNCH OF SECURITIZATION

Roberto Ruozì

7

LA MODERNA TEORIA DELLA FINANZA E L'AMMORTAMENTO DEI PRESTITI

MODERN FINANCE AND LOAN AMORTIZATION

Carlo Mari

19

FORMULE PER IL CALCOLO DELL'ELEMENTO DI AIUTO NELLE GARANZIE A FAVORE DELLE PMI: IL CASO DELL'ITALIA

*FORMULAE FOR CALCULATING THE AID ELEMENT IN
GUARANTEES FOR SMES:
THE CASE OF ITALY*

Pierangelo Ciurlia, Maria Chiarolla e Alessia Quarta

51

**IL SISTEMA PENSIONISTICO OBBLIGATORIO ITALIANO:
I RISULTATI DI BILANCIO E GLI ANDAMENTI NEI 35 ANNI
DI MONITORAGGIO DAL 1989 AL 2023**

*THE ITALIAN MANDATORY PENSION SYSTEM:
BUDGETARY RESULTS AND TRENDS IN THE 35 YEARS
OF MONITORING FROM 1989 TO 2023*

Centro Studi e Ricerche Itinerari Previdenziali

77

SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

(a cura di Elisabetta Boccia)

99

IL RILANCIO DELLA CARTOLARIZZAZIONE¹

THE RELAUNCH OF SECURITIZATION

Roberto Ruozi

Università Commerciale "Luigi Bocconi" di Milano

apbsrl@gmail.com

¹ Ringrazio i colleghi professori Stefano Dell'Atti e Pierpaolo Ferrari e il Dottor Massimiliano Franzaroli che hanno letto la prima stesura del testo e fornito preziosi consigli. Ovviamente tutta la responsabilità di questo scritto resta solo mia.

Il rilancio della cartolarizzazione

La cartolarizzazione consente di trasformare attività finanziarie di vario tipo in titoli negoziabili nel mercato. Sorta nel secolo scorso si è sviluppata moltissimo a beneficio delle banche cedenti crediti, di chi compra questi ultimi, dell'integrazione dei mercati finanziari e del finan-

ziamento dello sviluppo economico. Negli anni ha subito un rallentamento e sarebbe bene che ci si adoperasse per invertire la rotta sia per i crediti buoni sia per i NPL sia in maniera tradizionale sia in quella più moderna della cartolarizzazione sintetica, in cui si non si cedono crediti bensì solo il loro rischio.

Parole chiave: Cessione dei crediti. Integrazione dei mercati. Ruolo del patrimonio delle banche. Cessione dei rischi dei crediti. Innovazione finanziaria. Protezione degli investitori.

The revival of securitization

Securitization allows for the transformation of a variety of types of financial assets into tradable securities on the market. Introduced in the past century, securitization has significantly developed, benefiting banks that sell loans, investors who purchase them, financial market integration and the financ-

ing of economic development. Over the years, securitization has experienced a slowdown, and efforts should be made to reverse this trend -both for performing loans and non-performing loans (NPLs)- through traditional securitization as well as the more modern synthetic securitization, in which credit is not transferred but only its risk.

Keywords: *Transfer of loans. Market integration. Role of banks' capital. Transfer of credit risks. Financial innovation. Investor protection.*

 1. PREMESSA

La cartolarizzazione sorse negli anni 70 del secolo scorso come operazione in base alla quale attività finanziarie illiquide di vario tipo possono essere trasformate in titoli negoziabili nel mercato finanziario. La sua storia è quindi ormai lunga e in essa la logica e la tecnica si sono trasformate più volte, anche sotto la spinta dell'influsso di una regolamentazione che progressivamente è diventata sempre più puntuale, mirante soprattutto alla tutela dei diritti degli investitori in attività cartolarizzate.

In queste note non intendo entrare nel merito tecnico e legale di tale regolamentazione ed esamino invece alcuni suoi aspetti pratici importanti. Mi soffermerò sull'esame di alcune variabili che consentono di suddividere la cartolarizzazione in comparti abbastanza diversi gli uni dagli altri, come i due seguenti: A. la cartolarizzazione cosiddetta "tradizionale", a sua volta suddivisa nel comparto del trasferimento di strumenti finanziari vivi e in quello del trasferimento di strumenti finanziari critici, come i cosiddetti non performing loans (NPL); B. la cosiddetta cartolarizzazione "sintetica", la quale non trasferisce a terzi la proprietà di determinate attività finanziarie, ma ne trasferisce solo il relativo rischio, non influenzando quindi sulla liquidità di un credito bensì unicamente sulla struttura, sulle dimensioni e sui rischi delle attività figuranti nel bilancio del cedente e perciò anche sui ratios della vigilanza prudenziale particolarmente importanti nel caso delle banche.²

 2. LO STATO DELL'ARTE

Dopo anni di espansione lo sviluppo della cartolarizzazione tradizionale dei crediti vivi, specie dopo la grande crisi del 2007 2008, è rallentato, nonostante che gli obiettivi perseguiti dai potenziali cedenti, rappresentati soprattutto da banche, siano nel frattempo diventati sempre più rilevanti, coinvolgendo in particolare l'importo ponderato totale del loro attivo di bilancio, la necessità dei correlati accantonamenti

² Sulla cartolarizzazione in generale si veda il capitolo ad essa dedicato da S. Dell'Atti nel volume a cura di R. Ruozi intitolato *Economia della banca*, Egea, 2024.

prudenziali, le esigenze di mezzi patrimoniali per rispettare i ratios di vigilanza, la loro reputazione, la loro struttura organizzativa specie per la gestione e il recupero delle attività finanziarie trasferite, la possibilità di impiegare in modo anche diverso da quello tradizionale i mezzi finanziari ricevuti con la cessione delle attività suddette e via dicendo. La stessa struttura e la stessa strategia generale delle banche cedenti sono state modificate nel corso degli anni e, quando la cartolarizzazione tradizionale è diventata sistematica, si è anche dato vita ad intermediari che producono credito al fine di distribuirlo, secondo un modello (alternativo al classico originate-to-hold) cosiddetto originate-to-distribuite, il quale può produrre risultati differenti a seconda dei modi in cui è usato e della qualità comparata delle attività cedute e di quelle nuove finanziate con la liquidità ricevuta in seguito alle cessioni.

Alcuni di questi elementi sono diventati essenziali specie quando la qualità delle attività cedute è peggiorata e, accanto o in sostituzione di prestiti vivi, ha iniziato a comprendere in misura sempre maggiore crediti problematici, come i cosiddetti NPL già citati. Con la loro cessione i bilanci delle banche cedenti si sono “alleggeriti”, con benefici per la reputazione di queste ultime, per la riduzione delle loro necessità di accantonamenti a riserva, per la riduzione delle relative spese di gestione e di recupero dei crediti contenziosi, per l'aumento della redditività comparata di tutte queste operazioni, per la quotazione delle azioni delle banche cedenti e così via. Questo tipo di cartolarizzazione è esploso dopo la crisi finanziaria del 2007 2008 e quella dell'economia reale che l'ha seguita. Attualmente esso è tuttavia stato ridimensionato soprattutto perché la grande maggioranza di tali crediti non performing è stata via via già ceduta sia perché nel frattempo la qualità dei crediti bancari è migliorata per la ancora maggiore attenzione posta dalle banche nella valutazione degli affidamenti e per il miglioramento sostanziale dell'economia reale e della conseguente riduzione delle crisi e delle insolvenze delle imprese.

Sta per contro diffondendosi con sempre maggiore intensità e rapidità la cartolarizzazione “sintetica”, la quale non prevede la cessione definitiva a terzi di attività finanziarie e soprattutto di crediti bensì, ad esempio, la stipula di un derivato, come sono quelli chiamati credit default swaps (CDS), contratto di scambio sul rischio di quei crediti. La controparte di tale contratto derivato in effetti accetta di pagare le perdite subite dalla banca cedente crediti quando si verificano eventi avversi relativi a questi ultimi, come il loro mancato puntuale e integrale rimborso. Tale controparte si espone quindi ai rischi delle attività in questione senza che si verifichi il loro trasferimento. Le contropartite più diffuse sono rappresentate dalle compagnie di assicurazione.³

Nel complesso, la cartolarizzazione appare quindi un elemento importante della struttura e del funzionamento dei mercati bancari e finanziari, anche se non è semplice conoscere esattamente le sue dimensioni che sono oggettivamente difficili da stimare.

Per quanto riguarda l'Italia gli unici dati ufficiali disponibili sono peraltro quelli forniti da Banca d'Italia⁴ i quali dicono che lo stock di prestiti cancellati dai bilanci delle banche del nostro paese (e quindi cartolarizzati) era al 30 settembre 2024 pari a poco più di 192 miliardi di

3 Vedi Marsh Mc Lennon e Oliver Wyman, La gestione proattiva dei crediti, Come liberare valore attraverso la cartolarizzazione, 2024.

4 Banca d'Italia, Base dati statistica, Cartolarizzazione di prestiti bancari per tipologia e settori di controparte: prestiti cancellati dai bilanci (consistenza), 8.12.2024.

euro, di cui quasi 166 miliardi rappresentati da sofferenze. La stessa fonte consente anche di presumere che negli ultimi anni la generale situazione in materia sia stata piuttosto statica, il che lascia ritenere che gli spazi per un suo sviluppo siano abbastanza ampi, non fosse che per colmare il divario che ci separa da altri paesi europei e, soprattutto, dagli USA.⁵

Questo è vero anche con riferimento allo sviluppo della cartolarizzazione sintetica, nella quale il divario suddetto dovrebbe essere ancora più forte.

3. OPINIONI SULL'UTILITÀ E SUL SOSTEGNO DELLO SVILUPPO DELLA CARTOLARIZZAZIONE

L'influsso esercitato dalla cartolarizzazione sugli intermediari bancari e non bancari, sui loro mercati e sull'economia in generale, influsso che varia a seconda delle diverse strategie condotte in materia dalle banche che effettuano cartolarizzazioni tradizionali e/o sintetiche cedendo solo crediti o rischi su crediti vivi da quelle che cedono crediti non performing, è così facile da immaginare. In generale, è facile riconoscere che il ruolo della cartolarizzazione è positivo per le banche cedenti crediti, per chi compra questi ultimi e vi investe risorse finanziarie proprie o di terzi, per l'integrazione dei mercati nazionali e internazionali e, infine, per il finanziamento dello sviluppo economico e sociale.

Opinioni in questo senso sono state quindi largamente condivise anche negli ultimi tempi ed è per questo che in molte sedi si stanno predisponendo documenti per l'adozione di misure per il suo rilancio su vasta scala. Fra tali documenti spiccano quelli della Commissione europea, la quale ha affermato che: "quando ben strutturata, la cartolarizzazione può svolgere una funzione positiva per l'economia come strumento per attrarre nuovi mezzi finanziari degli investitori ed anche per il risk management trasferendo da banche o da altri intermediari il rischio dei crediti ad un più ampio mondo di investitori istituzionali sia europei sia di altri Stati, i quali possono peraltro beneficiare di una più ampia platea per la diversificazione delle loro esposizioni. La cartolarizzazione può favorire il rafforzamento del mercato dei capitali e ampliare le opportunità di finanziamento. Può inoltre liberare i bilanci delle banche e degli altri intermediari finanziari consentendo loro di fornire maggiori crediti all'economia"⁶.

Nello stesso documento la Commissione afferma che la cartolarizzazione può favorire anche i progetti di transizione verde e digitale che potrebbero migliorare la produttività, la competitività e la resilienza dell'UE, per la qual cosa è necessaria una diversa allocazione del capitale, realizzabile solo se gli intermediari bancari e non bancari dispongono

5 AFME, European Datawarehouse e Sale International, European Benchmarking Exercise (EBE) for Private Securitization, 29.11.24. Vedi anche M.CELLINO, Cartolarizzazioni al palo in Europa. La stretta alle regole pesa sul mercato, Il Sole 24 Ore, 03.01.2025.

6 European Commission, Targeted consultation of the functioning of the securitization framework, 2024.

di strumenti adeguati allo scopo. Conseguentemente la stessa Commissione ha distribuito un documento di consultazione sul possibile miglioramento del funzionamento del contesto economico e giuridico in cui potrebbe svolgersi la cartolarizzazione nei paesi dell'UE. I risultati della consultazione saranno noti nei prossimi mesi.

Un altro documento di consultazione è stato reso pubblico anche dalla Banca d'Italia, soprattutto per ottenere pareri sulle nuove disposizioni regolamentari e di vigilanza che essa ha allo studio.⁷ I risultati di tale consultazione sono stati resi pubblici nel marzo 2024 e, una volta esaminati ed elaborati, dovrebbero essere utilizzati per varare le citate nuove disposizioni regolamentari.⁸

Il tema è relevantissimo per il futuro sviluppo della cartolarizzazione nel nostro paese. Essa è in effetti sorta e si è sviluppata in Italia qualche decennio fa senza norme specifiche, ma verso la fine degli anni 90 del secolo scorso è stata disciplinata soprattutto per evitare di mettere a repentaglio la stabilità del sistema finanziario, specie mediante il ricorso a rating esterni, il disallineamento tra gli interessi dei cedenti e quelli degli investitori, l'utilizzo di fattori di ponderazione non consoni rispetto al profilo di rischio delle operazioni e il progressivo distacco dalle attività sottostanti dei titoli emessi nell'ambito della cartolarizzazione.⁹ Norme speciali hanno riguardato anche la cartolarizzazione sintetica e diversi sempre nuovi aspetti di quella tradizionale, specie se avente per oggetto i NPL sui quali è pure intervenuta nel 2013 la European Banking Authority.¹⁰

Il problema è molto delicato specialmente per la tutela dei diritti degli investitori finali che non sono solo rappresentati da intermediari bancari, finanziari e assicurativi di buon livello e molto esperti, ma anche da privati non sempre del tutto consapevoli dei rischi che possono correre acquistando i titoli di cui sto parlando.

Non stupisce quindi che per l'ennesima volta le nostre autorità di vigilanza si stiano muovendo per rendere questo mondo più trasparente, più efficiente e più sicuro. In effetti, la cartolarizzazione da noi ha avuto effetti decisamente positivi, ma ha anche creato alcuni problemi, in verità non gravissimi e poco numerosi, soprattutto quando è stata utilizzata violando o aggirando la regolamentazione esistente. Questi casi, molto simili nella sostanza a quelli piuttosto vari e numerosi delle più o meno classiche innovazioni finanziarie, dimostra del resto che queste ultime si muovono sempre più velocemente della regolamentazione, la quale interviene spesso con ritardo. L'esigenza di colmare queste lacune, quindi, c'è e bisogna fare di tutto, se non per eliminarle completamente, che è irrealistico, almeno per ridurle nei limiti del tollerabile.¹¹ È del resto proprio in questo senso che stanno andando le già accennate attività di Banca d'Italia, sempre preoccupata giustamente della stabilità del sistema bancario e finanziario e dei suoi influssi sull'economia e sulla società.

Sull'opportunità del miglioramento qualitativo e anche del maggiore sviluppo dimensionale della cartolarizzazione è intervenuto anche il recentissimo rapporto Draghi sul

7 Banca d'Italia, Documento di consultazione. Sulle disposizioni della Banca d'Italia relative a banche, intermediari finanziari, SIM, SGR, SICAV e SICAV in materia di cartolarizzazione, 27.07.2023.

8 Banca d'Italia, Modifica delle disposizioni della Banca d'Italia relative a banche, intermediari finanziari, SIM, SGR e SICAF in materia di operazioni di cartolarizzazione, marzo 2024.

9 Vedi C.D'Auria, Il nuovo securitization framework, DB non solo diritto bancario, 29.11.2018.

10 Su quest'ultimo tema si veda European Banking Authority (EBA), Opinion of the European Banking Authority to the European Commission on the Regularity Treatment of Non-performing Exposure Securitisation, 23.10.2019.

11 Vedi ancora il volume a cura di R. Ruozi, Economia della banca, cit.

futuro della competitività europea, nel cui testo si “raccomanda alla Commissione di presentare una proposta di adeguamento dei requisiti prudenziali per le attività di cartolarizzazione. I requisiti patrimoniali devono essere ridotti per alcune categorie semplici, trasparenti e standardizzate per le quali non esistono rischi effettivi. Parallelamente, l’UE dovrebbe rivedere le regole di trasparenza e di dovuta diligenza per le attività cartolarizzate, che sono relativamente elevate rispetto ad altre classi di attività e ne riducono l’attrattività. La creazione di una piattaforma dedicata alla cartolarizzazione, come hanno fatto altre economie, contribuirebbe ad approfondire il mercato soprattutto se favorita da un sostegno pubblico mirato”.¹²

Anche il Parlamento europeo aveva del resto preso non molto tempo fa una posizione precisa ed equilibrata sulla cartolarizzazione facendo interessanti proposte in argomento. Un rapporto pubblicato nell’ottobre 2015 contiene infatti un’analisi nella quale si ribadiscono i vantaggi che essa può recare al cedente credito e agli investitori, riducendo i costi di finanziamento di questi ultimi ed aumentando le capacità di finanziamento dei primi, specie attraverso gli influssi prodotti sui ratios di vigilanza prudenziale, con conseguenze che - dice il rapporto in questione - potrebbero “anche presentare vantaggi più generali sul piano economico e sociale”. Nello stesso rapporto si fa comunque presente che la cartolarizzazione può anche presentare dei rischi per il sistema finanziario, come accaduto durante la crisi del 2007-2008, i quali possono portare all’allungamento della catena dell’intermediazione, alla creazione di uno squilibrio temporale fra le aspettative degli interessi dei vari attori della stessa catena, all’aumento della loro dipendenza dai modelli matematici, alla non sempre precisa valutazione esterna dei rating e, in definitiva, all’aumento dei rischi specifici e sistematici delle banche. Alcuni di questi timori potrebbero essere del resto attenuati dalle nuove norme emanate recentemente dal Parlamento suddetto, che comunque sono interessanti anche per la semplificazione delle procedure specie per facilitare il maggior coinvolgimento che, anche con lo sviluppo della cartolarizzazione, le banche potrebbero avere nel sostegno dell’economia reale.¹³

Nello stesso senso si è espresso anche Enrico Letta sottolineando che la cartolarizzazione è un “collegamento unico” fra il credito e i mercati dei capitali, che può ampliare e diversificare il campo delle attività interessanti gli investitori e liberare i bilanci bancari migliorando la loro capacità di finanziamento dell’economia. Egli auspica quindi il varo di riforme a livello europeo per rafforzare l’accessibilità e l’efficacia di questo strumento.¹⁴

Considerazioni ancora più positive sono infine contenute nel cosiddetto rapporto Noyer contenente proposte per l’unione del risparmio e dell’investimento. Partendo dal presupposto che “un rilancio ambizioso della cartolarizzazione è indispensabile”, dopo un’analisi attenta e approfondita, esso si sofferma soprattutto sulla necessità di correggere rapidamente il relativo quadro regolamentare e prudenziale e sull’opportunità di mettere in piedi una piattaforma europea utile soprattutto per rendere più profondi e sicuri i mercati dei capitali, con tutte le conseguenze che si potrebbero produrre sulla relativa efficienza in condizioni di stabilità.¹⁵

12 M.Draghi, Il futuro della competitività europea, Parte A, Una strategia di competitività per l’Europa, settembre 2024.

13 Parlement Européen, Comprendre la titrisation, Historique, avantages, risques, ottobre 2015.

14 E.Letta, Much more than a market, Speed, security, solidarity, aprile 2024.

15 C.Noyer e altri, Développer les marchés des capitaux européens pour financer l’avenir, aprile 2024.

Pressoché tutti gli esperti che hanno studiato la cartolarizzazione hanno quindi concluso le loro analisi sottolineando i suoi punti forti, che sono chiari e precisi e consentono di delineare in modo inequivocabile le conseguenze che essa potrebbe provocare sugli intermediari bancari e non bancari e sui rispettivi mercati.

Su tali aspetti e su tali conseguenze si è peraltro recentemente inserita una ONG indipendente denominata Finance Watch localizzata a Bruxelles, che si definisce specializzata “nell’attività di ricerca e sensibilizzazione sulla regolamentazione finanziaria”. Un rapporto da essa presentato nell’ottobre 2024 si pone in maniera diversa da quella generale vista in precedenza, cercando di dimostrare che la cartolarizzazione non è uno strumento per finanziare l’economia reale, ma solo un meccanismo per le banche utile a rifinanziare prestiti che pesano sul loro bilancio, a ridurre i mezzi patrimoniali previsti dai ratios di vigilanza prudenziale, a trasferire i rischi dei crediti a intermediari finanziari non bancari e a generare collateralizzati per ottenere liquidità dalle banche centrali. In sostanza poi la cartolarizzazione non ridurrebbe la dipendenza dell’economia europea dai finanziamenti bancari (che evidentemente considera fenomeno negativo), ma la rafforzerebbe. Il rapporto in questione fa anche alcune considerazioni tecniche, non realistiche e comunque non dimostrate in alcun modo, in base alle quali la capacità della cartolarizzazione di aumentare i prestiti all’economia reale sarebbe molto limitata, mentre aumenterebbe i rischi per la stabilità finanziaria. Non si attiverebbe quindi nuovo capitale per gli investimenti e le banche utilizzerebbero i mezzi finanziari ottenuti con la vendita di crediti solo per soddisfare gli azionisti e non per fare anche nuovi prestiti.¹⁶

Le tesi di Finance Watch sono state riprese recentemente sulle pagine di un noto quotidiano francese, in cui si afferma che non sarebbe opportuno sostenere lo sviluppo della cartolarizzazione perché essa non sarebbe un elemento di finanziamento dell’economia reale bensì solo un mezzo per ottimizzare l’utilizzo dei ratios di vigilanza prudenziale delle banche.¹⁷

Va da sé che tali opinioni, decisamente contrastanti con quelle di coloro che meglio conoscono questi problemi, non sono state prese seriamente in considerazione da nessuno, soprattutto perché dimostrano che chi le ha espresse non ha correttamente percepito né gli elementi fondamentali né la storia della cartolarizzazione.

4. IL PUNTO SULLA SITUAZIONE

Quanto finora esposto dimostra che l’attenzione su quest’ultima è molto aumentata dimostrando, fra l’altro, che non si tratta solo di un problema italiano bensì di una questione che interessa anche molti altri paesi. Il fenomeno va comunque trattato con attenzione e prudenza. La sua storia ci ha infatti insegnato che si tratta di una tecnica finanziaria che fu a suo tempo innovativa e benvenuta, il cui sviluppo ha prodotto

¹⁶ Finance Watch, Introduction to securitization, Structures, regulation and market for asset-backed securities in the EU, 2024.

¹⁷ Vedi J.Coupepy-Soubeyran, Risque financier; le retour du refoulé, Le Monde, 3/4.11.2024.

conseguenze positive sulla struttura e sull'efficacia dei mercati bancari e finanziari, le quali tuttavia sono difficilmente misurabili in termini quantitativi anche perché i dati di cui si dispone non lo consentono e devono essere quindi valutate soprattutto in termini logici. In questo senso non si può del resto dimenticare che la cartolarizzazione ha comunque avuto anche momenti critici quando il suo utilizzo è stato distorto penalizzando i diritti di coloro che avevano investito in titoli cartolarizzati di vario tipo, con in primis quelli incorporanti crediti e diritti immobiliari.

Una situazione del genere non è affatto né tipica né esclusiva dell'innovazione rappresentata dalla cartolarizzazione, riguardando anche più o meno quasi tutte le altre forme di innovazione finanziaria, che si sono sviluppate nel corso degli anni con l'utilizzo di strumenti che di per sé non furono mai solo positivi o solo negativi. In effetti, le conseguenze del relativo impiego non sono mai dipese tanto dai loro aspetti tecnici quanto piuttosto dagli obiettivi e dalle modalità di tale impiego. Strumenti e tecniche apparentemente e teoricamente ben strutturati hanno così potuto dare origine anche a catastrofi, esplose in presenza di una più o meno efficace normativa e di una più o meno sollecita e tempestiva azione delle autorità di vigilanza, le quali purtroppo, come già ricordato, viaggiano ad una velocità inferiore a quella dell'innovazione.

Nella realtà italiana dobbiamo rilevare che, tutto sommato, gli aspetti positivi della cartolarizzazione in questi decenni, con tutte le cautele del caso per la non sempre soddisfacente qualità dei dati di cui si dispone, si devono ritenere superiori a quelli negativi e che, in particolare, non hanno mai provocato grandi problemi agli investitori, nonostante che questi ultimi non siano sempre stati del tutto consapevoli dei rischi corsi. La regolamentazione e l'attività delle autorità di vigilanza hanno contribuito a caratterizzare tale situazione, ma in verità non sono state determinanti. Il mercato dei titoli incorporanti i crediti ceduti, grazie anche al loro aiuto, ha infatti comunque dimostrato un buon equilibrio che, tuttavia, è naturalmente cambiato diverse volte. In estrema sintesi, analizzando la storia della cartolarizzazione in Italia essa può essere infatti suddivisa in tre momenti, nei quali non sono peraltro mai stati provocati veri e propri drammi per gli investitori. Il primo di questi momenti in ordine temporale è stato quello che ha visto nascere e svilupparsi la cartolarizzazione tradizionale di crediti vivi, il secondo quello dell'esplosione delle cessioni di NPL e il terzo quello rappresentato dalla cartolarizzazione sintetica. In ogni caso attualmente il suo mercato globale e soprattutto la sua componente tradizionale sono oggi alimentati quasi esclusivamente da crediti sani anche perché quelli non performing sono pressoché spariti dai bilanci bancari. È vero che potrebbero prima o poi riapparire specie se lo stato della nostra economia e quindi la salute delle nostre imprese dovessero continuare a peggiorare, ma per il momento il loro non favorevole andamento è abbastanza ben controllato dalle banche, che ne stanno tenendo debito conto nella valutazione dei nuovi crediti e nella gestione di quelli già in essere.

Anche con riguardo alla cessione dei crediti vivi, comunque, le necessità delle banche si sono relativamente ridotte specie perché la liquidità che hanno cercato con tale cessione oggi può essere reperita nel mercato bancario e finanziario in altre forme anche meno costose. L'influsso che la cartolarizzazione ha provocato sul complesso dei crediti all'economia è stato quindi ridimensionato, ma potrà riprendere non fosse altro che per la riduzione che, a parità di altre condizioni, continuerà a provocare sul fabbisogno di

mezzi patrimoniali da parte delle banche, la quale potrebbe rilanciare l'attività creditizia e migliorare la sua redditività.

5. LA CARTOLARIZZAZIONE SINTETICA

A quest'ultimo proposito la cartolarizzazione influirebbe infatti sul rischio di parte del portafoglio crediti delle banche e quindi sulla riduzione dell'importo totale di tale portafoglio ponderato rispetto a quel rischio, riducendo l'appena accennato bisogno di mezzi propri e consentendo quindi, sempre a parità di altre condizioni, la concessione di crediti aggiuntivi a sostegno dell'economia reale. In realtà, quest'ultimo obiettivo potrebbe essere perseguito non solo attraverso la cessione dei crediti, ma anche attraverso l'esternalizzazione dell'assunzione del rischio di insolvenza degli stessi, ciò che in verità avviene già oggi, ma in forme e misure che potrebbero essere più strutturate e diffuse nei prossimi anni. A questo proposito in effetti si è iniziato a parlare della cosiddetta gestione produttiva dei crediti analizzata in dettaglio nel documento di Marsh Mc Lennon e Oliver Wyman citato nella precedente nota (3).

Secondo i dati in esso riportati, il trasferimento del rischio dei crediti potrebbe ridurre del 40/50% i requisiti di mezzi propri a questi connessi, con un evidente relativo aumento del loro rendimento. Detto trasferimento, se effettuato con la tecnica della cartolarizzazione sintetica e quindi con l'acquisizione di garanzie di diverso tipo e specialmente di carattere assicurativo, fa sì che la proprietà dei crediti e le relazioni con i clienti titolari di questi ultimi rimangano in mano alle banche cedenti, le quali cesserebbero di avere bisogno di accantonamenti per coprire i rischi di insolvenza. Tutto ciò dovrebbe quindi contribuire a migliorare il rendimento dei finanziamenti esistenti e ad aumentare le nuove erogazioni, magari concordandole con i fornitori delle relative garanzie. Ciò evidentemente implicherebbe una sorta di partnership fra le banche e le compagnie di assicurazione rappresentante un modesto ma significativo contributo alla realizzazione di una più stretta collaborazione fra le due categorie di imprese, che si è già fortemente sviluppata in altri comparti dell'attività finanziaria negli ultimi anni.

Nel complesso una sintesi dei vantaggi della cartolarizzazione può essere tratta dal documento prima citato, il quale dice che le banche dovrebbero privilegiare le operazioni sintetiche perché sono più semplici e più rapide da realizzare, offrono maggiore riservatezza e attirano una platea più ampia di investitori, interessati alla possibilità di acquisire l'esposizione al rischio di credito senza accollarsi rischi operativi legati alla gestione del cash flow, come invece avviene con le cartolarizzazioni tradizionali. Infine, trattandosi di operazioni unfunded, permettono all'investitore di non avere costi di liquidità addizionali, in quanto il finanziamento rimane in capo alla banca originante, che ha generalmente accesso a fonti di approvvigionamento meno costose.

A proposito del trasferimento dei rischi sui crediti soprattutto bancari attuato con la cartolarizzazione e del loro impatto degli stessi rischi sull'economia in generale non ho finora detto nulla. In realtà si potrebbe pensare che il peso di tali rischi sul sistema

economico possa in qualche modo essere ridotto dai trasferimenti attuati con la cartolarizzazione, ma in termini pratici non è sempre così. In effetti i rischi in questione si trasferiscono da un creditore all'altro, ma rimangono all'interno del sistema economico, e a questo proposito la cartolarizzazione è in genere sostanzialmente neutrale, almeno nel breve periodo. Se si ragiona a meno breve termine e in verità forzando molto la mano si potrebbe invece effettivamente presumere che, nei limiti in cui la cartolarizzazione potrebbe - a parità di altre condizioni - aumentare il credito bancario all'economia per l'influsso esercitato sui ratios di vigilanza patrimoniali delle banche e quindi sulla loro possibilità di sviluppare nuovi crediti o di aumentare quelli già in essere, la cartolarizzazione stessa potrebbe favorire lo sviluppo economico e ridurre i suoi rischi, ma non è certamente questo l'aspetto più importante del suo utilizzo.¹⁸

6. CONCLUSIONI

Le operazioni di cartolarizzazione tradizionali e sintetiche sono quindi una realtà già profondamente inserita nei mercati bancari e finanziari di molti paesi, compreso il nostro. Dopo oltre cinquant'anni di vita le sue forme tecniche e le modalità del suo utilizzo, grazie anche al miglioramento della regolamentazione e a una continua azione delle autorità di vigilanza, seppur con tutti i loro limiti, sono state consolidate e continuano a manifestare una buona elasticità, nel senso che riescono ad adattarsi ai cambiamenti che intervengono nell'economia degli intermediari bancari e finanziari e in quella dei relativi mercati nonché nelle condizioni generali dell'andamento economico e sociale dei singoli paesi e anche a livello internazionale.

Tutto ciò giustifica ampiamente gli auspici di coloro che hanno sostenuto, specie alla luce del rallentamento della cartolarizzazione riscontrato negli ultimi anni, un suo rilancio e hanno messo anche allo studio modificazioni regolamentari e di vigilanza che meglio tutelino i diritti degli investitori.

Che poi, ciò nonostante, sia possibile che accadano ancora nel mercato della cartolarizzazione fenomeni critici, più o meno come quelli che sono sempre esistiti anche in altri comparti dell'attività bancaria e finanziaria e che occorra, quindi, prepararsi a gestirli con grande cautela è non solo opportuno, ma addirittura indispensabile. La loro potenziale esistenza non deve tuttavia ostacolare lo sviluppo della parte buona della cartolarizzazione, la quale è utile per tutti i motivi precedentemente esaminati. Che qualcuno possa pensarla diversamente è legittimo, ma le sue tesi sono più che altro dovute alla scarsa conoscenza del fenomeno oggetto di queste note e di esse non dobbiamo quindi preoccuparci. Cerchiamo invece di fare il possibile affinché lo sviluppo che la cartolarizzazione ha avuto nel passato possa proseguire o addirittura accentuarsi negli anni che ci stanno di fronte.

18 Vedi W.Cohan, An old strategy is being reinvented by US banks, Financial Times, 7/8. 12. 2024.



LA MODERNA TEORIA DELLA FINANZA E L'AMMORTAMENTO DEI PRESTITI

MODERN FINANCE AND LOAN AMORTIZATION

Carlo Mari

DEIM - Dipartimento di Economia, Ingegneria, Società,
Impresa - Università della Tuscia

DEIM - Department of Economics, Engineering, Society,
Company - University of Tuscia

carlo.mari@unitus.it

La moderna teoria della finanza ha rivoluzionato impostazioni e costruzioni di base della matematica finanziaria classica. L'impossibilità di conciliare relazioni di tipo deterministico, quali la proprietà di scindibilità dei regimi finanziari, con l'aleatorietà dell'evoluzione temporale della struttura per scadenza dei tassi di interesse ha permesso di sviluppare, sulla base dell'argomento di arbitraggio, rappresentazioni più generali e di costruire una teoria unificata dell'ammortamento dei prestiti consistente con regimi finanziari arbitrari, regime semplice incluso. E nell'ambito del regime semplice, la rappresentazione con chiusura iniziale si dimostra l'unica coerente con il principio di assenza di opportunità di arbitraggio e con l'assenza di anatocismo. L'utilizzo

della rappresentazione ad interessi semplici con chiusura finale presenta, infatti, gravi limiti di consistenza sia con l'assenza di arbitraggio sia con l'assenza di anatocismo, oltre a mostrare incoerenze oggettive nelle applicazioni. Tra le applicazioni, ne verrà discussa una particolarmente significativa, la rimodulazione dei prestiti con variazione della scadenza, in cui l'utilizzo della rappresentazione con chiusura finale mostra violazioni palesi della condizione di "equità" non conciliabili con la legge degli interessi semplici. L'articolo è pensato per offrire a studiosi e tecnici una trattazione unitaria che, muovendo dai principi primi della moderna teoria della finanza, possa essere pienamente utilizzabile nella prassi operativa.

Parole chiave: Funzione di sconto; arbitraggio; debito residuo; piano d'ammortamento; interessi semplici; interessi composti.

Modern finance has revolutionized some basic settings and constructions of classical financial mathematics. The impossibility of reconciling the decomposability property of financial laws with the random evolution of the term structure of interest rates made it possible to develop, on the basis of the arbitrage argument, more general representations and construct a unified theory of loan amortization consisting of arbitrary financial laws, including the law of simple interest. And within the law of simple interest, the representation with initial closure turns out to be the only one consistent with the absence of both arbitrage and anatocism.

In fact, the use of the representation of simple interest with final closure is inconsistent with the absence of both arbitrage and anatocism and shows objective inconsistencies in application. A particularly significant one will be discussed, the rescheduling of loans with change of maturity, where the use of end-closure representation shows manifest violations of the "equity" condition that cannot be reconciled with the law of simple interest. This paper is designed to offer scholars and technicians a unified treatment that, moving from the first principles of modern finance, can be fully usable in operational practice.

Keywords: Discount function; arbitrage; amortizing loans; outstanding balance; amortization schedule; simple interest; compound interest.

 1. INTRODUZIONE

“Studiare dal punto di vista matematico la situazione del mercato dei titoli ad un determinato istante di tempo...per stabilire la legge di probabilità delle variazioni di prezzo, consistente con il mercato a quell'istante” (Bachelier, 1900) è stato l'obiettivo principale che ha ispirato il lavoro di Louis Bachelier, confluito poi nella sua tesi di dottorato discussa alla Sorbona nel 1900. L'ipotesi che i prezzi di mercato dei titoli azionari si muovono nel tempo di moto casuale appariva troppo avanti al suo tempo e, sotto certi aspetti, oltraggiosa nei confronti del pensiero economico dominante. Ma la sua visione avrebbe cambiato la finanza per sempre.

Dimenticata per diversi decenni, l'idea della casualità del movimento non esitò a riaffermarsi negli anni Cinquanta, e questa volta irreversibilmente, soprattutto a seguito dello svilupparsi di nuove tecniche di indagine matematica e statistica: all'osservazione statistica, i prezzi appaiono fissati dal Demone del Caso che in ogni istante estrae a “random number from a symmetrical population of fixed dispersion and added it to the current price” (Kendall) per determinare il prezzo all'istante successivo. Questa consapevolezza avrebbe consentito ad alcuni studiosi, uomini geniali e “visionari”, di trasformare nella seconda metà secolo scorso la finanza da disciplina meramente contabile a una vera e propria scienza (Dunbar, 2003).

Nel 1973, Black, Scholes e Merton risolvono, con un approccio metodologico rivoluzionario, il problema della valutazione delle opzioni finanziarie (Black e Scholes, 1973; Merton, 1973) e avviano l'uso estensivo dei processi stocastici e del calcolo stocastico nella modellizzazione dei fenomeni economici e finanziari. Quella metodologia diventerà rapidamente il fondamento della moderna teoria della finanza. Lo schema logico risolutivo è basato sull'argomento di arbitraggio, si suppone cioè che nel mercato non sia possibile comporre operazioni che diano un guadagno con certezza e senza impiego di capitale (*free lunches*), argomento destinato a diventare rapidamente il nuovo paradigma per la costruzione di modelli di valutazione coerenti, alternativo all'approccio di equilibrio¹. Gli effetti pervasivi del nuovo paradigma non tardarono a manifestarsi anche nel comparto obbligazionario del mercato finanziario. E i due decenni successivi furo-

1 L'equilibrio implica, comunque, l'assenza di opportunità di arbitraggio.

no decisivi per definire un impianto metodologico solido e coerente per la valutazione delle obbligazioni in condizioni di incertezza basato sull'argomento di arbitraggio.

La valutazione dei titoli obbligazionari era considerata un capitolo della matematica finanziaria ambientata in un habitat deterministico (De Felice e Moriconi, 1991) dove "in ogni istante non potrà essere accaduto se non tutto e soltanto tutto ciò che doveva accadere" (De Finetti, 1967). Tradizionalmente, quindi, la valutazione di un titolo obbligazionario (e dei prestiti) era ridotta ad un'impostazione meramente tecnica "di conteggi" (De Finetti, 1967).

I tassi di interesse "variable and unpredictable" sono state una delle cause dell'innovazione finanziaria (Silber, 1983). La turbolenza della dinamica dei tassi di interesse, avviatasi storicamente a seguito delle due crisi petrolifere degli anni settanta del secolo scorso, ha generato un'accentuata variabilità dei prezzi delle obbligazioni, trasformando operazioni finanziarie ritenute tradizionalmente non rischiose in operazioni rischiose per l'imprevedibilità dell'evoluzione dei tassi di interesse (*interest rate risk*). Per descrivere un mercato delle obbligazioni che evolve in condizione di incertezza occorrono modelli sofisticati che, pur rievocando i modelli utilizzati nell'*option pricing* di Black, Scholes e Merton, posseggano una loro specificità. Anche in questo caso è l'argomento di arbitraggio la base per costruire il processo di *pricing* delle obbligazioni e dei titoli *interest rate sensitive*. Tra la fine degli anni Settanta e gli anni Ottanta del secolo scorso molti modelli sono stati proposti nella letteratura e, tra questi, i modelli di Cox, Ingersoll e Ross (1985 a,b) e di Vasicek (1977) hanno avuto un ruolo fondamentale. Tuttavia, questi modelli, pur rispondendo alle esigenze specifiche di una trattazione stocastica dell'evoluzione nel tempo della struttura per scadenza dei tassi di interesse consistente con il principio di arbitraggio, hanno la peculiarità di produrre endogenamente la forma funzionale della struttura dei tassi e, conseguentemente, della funzione di sconto, risultando, in generale, non consistenti con strutture dei tassi (e funzioni di sconto) di forma arbitraria come sono quelle che possono essere osservate all'istante di tempo iniziale. E del resto, un modello descrittivo dell'evoluzione temporale della struttura dei tassi deve potersi sviluppare a partire dalla struttura dei tassi osservata in un determinato istante di tempo, l'istante di valutazione, da cui non è possibile prescindere. Per ovviare a questo inconveniente sono state proposte estensioni del modello di Cox, Ingersoll e Ross e del modello di Vasicek, nel tentativo di rendere la modellizzazione stocastica del processo evolutivo compatibile con strutture dei tassi iniziali arbitrarie. Nel 1992 Heath, Jarrow e Morton propongono una metodologia generale basata sul principio di arbitraggio per costruire modelli stocastici per l'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse consistenti con strutture dei tassi iniziali arbitrarie. Modellizzando i movimenti stocastici dell'intera curva dei rendimenti, questa metodologia riesce cogliere la complessità e a descrivere la dinamica tassi di interesse consistentemente con le strutture dei tassi osservate nel mercato all'istante di tempo iniziale.

Tutto questo complesso processo di trasformazione, che ha portato alla nascita della moderna teoria della finanza, ha profondamente messo in discussione idee e concetti che apparivano consolidati nella matematica finanziaria tradizionale. Si pensi, ad esempio, alla proprietà di scindibilità secondo Cantelli (Castellani, De Felice e Moriconi, 2005) che lega deterministicamente la funzione di sconto osservata al tempo iniziale alla fun-

zione di sconto osservabile a un'epoca futura. In un habitat stocastico in cui la struttura dei tassi evolve in condizione di incertezza, qualunque relazione che leghi la funzione di sconto osservata all'istante di tempo iniziale con la funzione di sconto ad un'epoca futura (che, ovviamente, non è nota all'istante di tempo iniziale in quanto non prevedibile) deve essere coerentemente costruita attraverso un approccio probabilistico che tenga conto dei possibili scenari evolutivi². L'impossibilità di conciliare la scindibilità dei regimi finanziari con l'aleatorietà dell'evoluzione temporale della struttura per scadenza dei tassi di interesse ha permesso di sviluppare, sulla base dell'argomento di arbitraggio, rappresentazioni più generali e di costruire una teoria unificata dell'ammortamento dei prestiti consistente con regimi finanziari arbitrari, regime semplice incluso. In linea con la metodologia introdotta da Heath, Jarrow e Morton, molte sono, infatti, le informazioni che possono essere estratte dalla funzione di sconto osservata all'istante di tempo iniziale. In particolare, la funzione di sconto iniziale consente di definire univocamente, grazie all'argomento di arbitraggio, una relazione di equivalenza finanziaria in vigore in quell'istante di tempo tra importi esigibili in epoche diverse. Tale relazione di equivalenza è basata sull'uguaglianza del valore attuale: due importi monetari disponibili in istanti di tempo diversi (o due flussi di importi monetari) sono finanziariamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso valore attuale calcolato con la funzione di sconto in vigore all'istante iniziale di valutazione.

Le conseguenze nell'ambito della valutazione e dell'ammortamento dei prestiti sono rilevanti. La definizione di una relazione di equivalenza basata sulla conoscenza della funzione di sconto iniziale consente di valutare le operazioni di prestito e di costruire i relativi piani d'ammortamento utilizzando funzioni di sconto arbitrarie (Mari, 2024), interesse semplice incluso, a patto che esse siano consistenti con l'assenza di arbitraggio.

L'interesse rinnovato nei confronti di un tema classico, quello della valutazione e dell'ammortamento dei prestiti, e la necessità di raccordare l'impostazione tradizionale con la moderna teoria della finanza nascono dal fatto che nell'ultimo decennio si è assistito a un importante dibattito sulla legittimità dell'utilizzo della legge dell'interesse composto nella valutazione e nell'ammortamento dei prestiti. La discussione è stata, ed è tuttora, incentrata su due punti principali: il primo è se il processo di generazione di interessi su interessi, un fenomeno chiamato anatocismo, sia presente quando i prestiti sono concepiti secondo la legge dell'interesse composto (Annibaldi et al., 2017; Fersini e Olivieri, 2015; Pressacco et al., 2022); il secondo è se esistono metodi di ammortamento alternativi, coerenti con la legge dell'interesse semplice (Annibaldi et al., 2018; Mari e Aretusi, 2018, 2019) in cui non sia abbia produzione di interessi da interessi.

Il dibattito ha visto l'emergere di posizioni contrapposte, anche in ambito economico-finanziario e matematico. Dei piani d'ammortamento dei prestiti, oltre alla classica impostazione in regime composto, sono state prodotte versioni in interesse semplice (Annibaldi et al., 2017; Mari e Aretusi, 2018) e con funzioni di sconto arbitrarie (Mari,

2 La relazione di scindibilità secondo Cantelli era già stata oggetto di discussione anche in un habitat deterministico, ancor prima della nascita della moderna teoria della finanza, nell'ambito del dibattito svoltosi nella prima metà del Novecento tra Francesco Paolo Cantelli e Filadelfo Insolera (Annibaldi et al., 2024), dibattito che aveva portato quest'ultimo a sviluppare il concetto di scindibilità parametrica (Insolera, 1949, 1950).

2024). In interesse semplice esistono almeno due costruzioni che sono tra di loro molto diverse e inconciliabili, a cui si fa riferimento in letteratura con i termini ammortamento in regime semplice con “chiusura iniziale” (Mari e Aretusi, 2018) e ammortamento in regime semplice con “chiusura finale” (Annibali et al., 2018), intendendo nel primo caso che la valutazione del prestito è fatta attualizzando nel regime semplice gli importi delle rate di rimborso all’istante iniziale del prestito e, nel secondo caso, capitalizzando linearmente l’importo mutuato e le rate di rimborso dall’epoca di esigibilità sino all’epoca finale del prestito (coincidente con il pagamento dell’ultima rata).

Nonostante la pubblicazione di più di un lavoro in cui si è dimostrato che esiste una ed una sola costruzione coerente per forma e sostanza con la legge degli interessi semplici, quella con chiusura iniziale (Mari e Aretusi, 2019, 2023), sono ancora vivi alcuni tentativi di “salvare” l’approccio in regime semplice con chiusura finale (Annibali et al., 2023, 2024) adducendo ipotesi e congetture difficilmente sostenibili. Anche i riferimenti ad autorevoli studiosi di matematica finanziaria del passato a sostegno della condizione di chiusura finale appaiono deboli e circoscritti, e comunque non significativi perché collocati temporalmente in epoche precedenti alla costruzione della moderna teoria della finanza della quale non potevano conoscere i contenuti innovativi.

In questo lavoro, presenteremo dapprima la moderna teoria delle equivalenze finanziarie basata sulla conoscenza della funzione di sconto iniziale e l’argomento di arbitraggio. Mostriamo che la rappresentazione ad interessi semplici con chiusura finale, a differenza di quella con chiusura iniziale, non è consistente con il principio di assenza di opportunità di arbitraggio. Illustreremo, successivamente, che l’utilizzo di questa rappresentazione, indipendentemente dalla consistenza con l’arbitraggio, dà comunque origine ad “anomalie” finanziarie che rendono l’approccio impraticabile. E tra le anomalie ne discuteremo una particolarmente rilevante che mostra come tale costruzione non sia immune dal generare fenomeni anatocistici, parimenti al regime composto. Proveremo, quindi, che esiste un’unica rappresentazione della funzione di sconto coerente con il principio di assenza di opportunità di arbitraggio e con l’assenza di anatocismo, quella del regime semplice con chiusura iniziale.

Nella seconda parte tratteremo della rimodulazione dei prestiti e mostriamo che, nei casi in cui intervengono modifiche della scadenza, l’utilizzo della rappresentazione semplice con chiusura finale genera violazioni della condizione di “equità” non conciliabili con la legge degli interessi semplici. Violazioni che, ovviamente, non si verificano se si utilizza la rappresentazione ad interesse semplice con chiusura iniziale.

“La capitalizzazione semplice a tasso annuo costante non è che una capitalizzazione composta a tasso variabile” e la capitalizzazione composta a tasso costante non è che una capitalizzazione in regime semplice a tasso variabile. La prima espressione, quella virgolettata, è attribuita a Filadelfo Insolera (Annibali et al., 2024), la seconda la abbiamo aggiunta noi per completezza. Per quanto possano apparire ovvie, queste espressioni ci offrono la possibilità di trattare dell’anatocismo nei prestiti nel caso di funzioni di sconto arbitrarie. Di questo discuteremo nella parte conclusiva del lavoro.

2. LA VALUTAZIONE D'ARBITRAGGIO

Indichiamo con $v(0, T)$ la funzione di sconto osservata all'istante di tempo iniziale $t = 0$, l'istante di valutazione. Com'è noto, $v(0, T)$ rappresenta il valore al tempo $t = 0$ di un'unità monetaria esigibile ad un istante di tempo $T \geq 0$ e può incorporare rischio di credito (Duffie e Singleton, 1999; Mari e Renò, 2005). Detto in modo equivalente, $v(0, T)$ è l'importo che, sulla base delle informazioni disponibili all'istante di valutazione, viene scambiato con un'unità monetaria esigibile all'epoca T . L'importo $v(0, T)$ al tempo $t = 0$ può, quindi, essere trasformato in un importo unitario esigibile all'epoca T e, viceversa, un importo unitario esigibile all'epoca T può essere trasformato nell'importo $v(0, T)$ disponibile immediatamente, cioè al tempo $t = 0$. La funzione montante $m(0, T)$ è il reciproco della funzione di sconto,

$$m(0, T) = \frac{1}{v(0, T)}. \quad (1)$$

Da argomenti standard di non arbitraggio, segue che $v(0, T)$ è una funzione di T strettamente positiva (Castellani, De Felice e Moriconi, 2005),

$$v(0, T) > 0, \quad T \geq 0, \quad (2)$$

Con

$$v(0, 0) = 1. \quad (3)$$

2.1 La valutazione a pronti

Sia x_T un importo monetario esigibile al tempo T ($T \geq 0$). Sulla base delle informazioni disponibili al tempo $t = 0$ contenute nella funzione di sconto $v(0, T)$, esiste un unico importo x_0 al tempo $t = 0$ che può essere scambiato con x_T al tempo T senza introdurre opportunità di arbitraggio³. L'importo x_0 è dato dal valore attuale di x_T , calcolato con la funzione di sconto osservata al tempo $t = 0$,

$$x_0 \equiv V(0, x_T) = x_T v(0, T). \quad (4)$$

La differenza $x_T - x_0$ è l'interesse maturato sull'importo x_0 nell'intervallo $[0, T]$ e ha un significato importante. In economia e nelle rappresentazioni matematico-finanziarie, infatti, gli importi monetari assumono un significato solo in relazione all'istante di tempo nel quale essi sono disponibili o esigibili. Un importo monetario x_T esigibile ad un'epoca futura T incorpora una componente di interessi, $x_T - x_0$, che è dovuta al trascorrere del

³ Le dimostrazioni dei risultati relativi alle valutazioni d'arbitraggio a cui facciamo riferimento in questa sezione possono essere trovate nel testo già citato di Castellani, De Felice e Moriconi (2005).

tempo tra l'istante attuale e l'epoca di esigibilità. Per rendere immediatamente disponibile quell'importo, lo dovremmo scambiare con il suo valore attuale. Il processo di attualizzazione, trasforma l'importo x_T esigibile all'epoca T nell'importo x_0 disponibile al tempo $t = 0$ secondo l'Equazione (4), rimuovendo la componente di interessi $x_T - x_0$. Viceversa, il processo di capitalizzazione,

$$x_T = x_0 m(0, T) = \frac{x_0}{v(0, T)}, \tag{5}$$

trasforma l'importo x_0 disponibile al tempo $t = 0$ in un importo x_T esigibile in un'epoca futura T , includendo in esso gli interessi $x_T - x_0$ che maturano tra il tempo $t = 0$ e l'epoca di esigibilità T . L'importo x_0 può essere visto anche come il prezzo a pronti in $t = 0$ (*spot evaluation*) di un titolo a cedola nulla, (*zero-coupon bond*), che rimborsa x_T al tempo T .

L'estensione ai flussi di importi è immediata. Si consideri, infatti, il flusso di importi,

$$\mathbf{x} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\} \tag{6}$$

esigibili, rispettivamente, ai tempi t_1, t_2, \dots, t_m ($0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$). Anche in questo caso, esiste un unico importo S_0 esigibile al tempo $t = 0$ che può essere scambiato con il flusso \mathbf{x} , sulla base delle informazioni disponibili al tempo $t = 0$ contenute in $v(0, T)$ senza introdurre opportunità di arbitraggio. Esso è dato da

$$S_0 \equiv V(0, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m V(0, x_{t_k}) = \sum_{k=1}^m x_{t_k} v(0, t_k) \tag{7}$$

a mostrare che il valore al tempo $t = 0$ del "tutto" deve essere uguale alla somma dei valori delle sue "parti", altrimenti si genera arbitraggio. L'Equazione (7) mostra che S_0 si ottiene attualizzando gli importi del flusso \mathbf{x} dall'istante di esigibilità al tempo $t = 0$. L'importo $S_0 \equiv V(0, \mathbf{x})$ si definisce valore attuale del flusso \mathbf{x} . Il processo di attualizzazione, come abbiamo visto, rimuove la componente di interessi contenuta nei singoli importi di \mathbf{x} , finanziariamente legata al trascorrere del tempo, determinando l'unico importo che può essere scambiato al tempo $t = 0$ con il flusso \mathbf{x} senza introdurre opportunità di arbitraggio. S_0 può essere visto anche come il prezzo a pronti di un titolo che corrisponde il flusso di importi \mathbf{x} .

2.1.1 Il regime degli interessi semplici con chiusura finale e l'arbitraggio

Considereremo tre differenti rappresentazioni della funzione di sconto iniziale, quella ad interessi composti,

$$v(0, T) = \frac{1}{(1 + i)^T}, \tag{8}$$

quella ad interessi semplici,

$$v(0, T) = \frac{1}{1 + iT}, \quad (9)$$

e quella ad interessi semplici con chiusura finale fissata ad all'epoca di scadenza t_m dell'ultimo importo x_{t_m} del flusso da valutare,

$$v(0, T; t_m) = \frac{1 + (t_m - T)}{1 + it_m}, \quad T \leq t_m. \quad (10)$$

Quest'ultima rappresentazione si ottiene uguagliando il valore $v(0, T; t_m)$, capitalizzato linearmente dall'istante $t = 0$ all'epoca finale (fissata) t_m , al valore capitalizzato linearmente dal tempo T all'epoca finale t_m di un'unità monetaria esigibile al tempo T . A differenza delle funzioni di sconto (8) e (9), la funzione di sconto (10) ha una dipendenza esplicita dall'epoca finale t_m e per questo motivo abbiamo espressamente riportato il parametro t_m nella rappresentazione funzionale $v(0, T; t_m)$. Mostreremo che, proprio per questa dipendenza dal parametro t_m , la funzione di sconto ad interessi semplici con chiusura finale non è consistente con l'assenza di arbitraggio. Si considerino, infatti, gli importi singoli $x_1 = 10$ e $x_2 = 110$ esigibili, rispettivamente, ai tempi 1 e 2 e, successivamente, il flusso $\mathbf{x} = \{10, 110\}$ i cui importi sono esigibili, rispettivamente, ai tempi 1, 2. Si ipotizzi che il tasso di interesse (periodale effettivo) sia $i = 10\%$. I valori attuale al tempo $t = 0$ di x_1 e x_2 sono dati, rispettivamente, da

$$V(0, x_1) = x_1 v(0, 1; 1) = \frac{x_1}{1 + i} = 9.09, \quad (11)$$

e

$$V(0, x_2) = x_2 v(0, 2; 2) = \frac{x_2}{1 + 2i} = 91.67. \quad (12)$$

Il valore attuale del flusso \mathbf{x} è dato da

$$V(0, \mathbf{x}) = x_1 v(0, 1; 2) + x_2 v(0, 2; 2) = x_1 \frac{1 + i}{1 + 2i} + x_2 \frac{1}{1 + 2i} = 100.83, \quad (13)$$

valore che è diverso da

$$V(0, x_1) + V(0, x_2) = 100.76, \quad (14)$$

in contraddizione con l'Equazione (7) e introducendo opportunità di arbitraggio⁴. L'argomento ha importanti implicazioni. Per evitare arbitraggi, infatti, è necessario che sia soddisfatta la relazione

$$V(0, \mathbf{x}) = V(0, x_1) + V(0, x_2) = x_1 v(0, 1; 1) + x_2 v(0, 2; 2). \quad (15)$$

4 Un ulteriore e interessante esempio di arbitraggio è discusso in Appendice.

perché solo in questo modo la somma del “tutto” è uguale alla somma delle sue “parti”. Più in generale, in riferimento al generico flusso di importi x deve valere la relazione

$$V(0, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m V(0, x_{t_k}) = \sum_{k=1}^m x_{t_k} v(0, t_k; t_k), \tag{16}$$

cioè

$$V(0, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \frac{x_{t_k}}{1 + it_k}. \tag{17}$$

Per evitare arbitraggi, dunque, l'unica rappresentazione della funzione di sconto possibile in interesse semplice è quella data dall'Equazione (9). Questo implica che esiste un unico modo per valutare i prestiti in regime semplice consistentemente con l'assenza di arbitraggio, quello di utilizzare la rappresentazione con chiusura iniziale.

2.2 La valutazione a termine e la relazione di equivalenza

La conoscenza della funzione di sconto all'istante di tempo iniziale $t = 0$, consente di definire una relazione di equivalenza finanziaria tra importi esigibili in istanti di tempo diversi. Siano, infatti, x_{T_1} e x_{T_2} due importi monetari disponibili, rispettivamente, ai tempi T_1 ($T_1 \geq 0$) e T_2 ($T_1 \leq T_2$). È possibile scambiare x_{T_1} e x_{T_2} sulla base delle informazioni disponibili al tempo $t = 0$ contenute nella funzione di sconto $v(0, T)$, senza introdurre opportunità di arbitraggio se e solo se

$$x_{T_1} = x_{T_2} \frac{v(0, T_2)}{v(0, T_1)}. \tag{18}$$

Segue, quindi, che due importi x_{T_1} e x_{T_2} possono essere trasformati l'uno nell'altro senza introdurre opportunità d'arbitraggio se e solo se essi hanno lo stesso valore attuale,

$$x_{T_2} v(0, T_2) = x_{T_1} v(0, T_1). \tag{19}$$

L'importo x_{T_1} può anche essere visto come il prezzo a termine (*forward price*) al tempo T_1 di un titolo a cedola nulla che paga x_{T_2} al tempo T_2 . Se $T_1 = 0$ e $T_2 = T \geq 0$ entrambe le Equazioni (18) e (19) si riducono all'Equazione (4), a mostrar che la valutazione a pronti rientra come caso particolare nella valutazione a termine.

La relazione binaria definita dall'Equazione (19) consente di introdurre univocamente una relazione d'equivalenza finanziaria, detta anche di equità finanziaria, (o, semplicemente, di equità) tra importi esigibili in epoche diverse. Infatti, è immediato verificare che tale relazione è riflessiva e simmetrica. Infatti, è banalmente riflessiva (x_t è equivalente a se stesso) e simmetrica (perché se x_{T_1} è equivalente a x_{T_2} significa che $x_{T_1} v(0, T_1) = x_{T_2} v(0, T_2)$, da cui segue che anche x_{T_2} è equivalente a x_{T_1} avendo lo stesso valore attuale). Inoltre è transitiva, perché se x_{T_1} è equivalente a x_{T_2} e x_{T_2} è equivalente a x_{T_3} , segue che

$x_{T_1} v(0, T_1) = x_{T_2} v(0, T_2)$ e $x_{T_2} v(0, T_2) = x_{T_3} v(0, T_3)$, da cui $x_{T_1} v(0, T_1) = x_{T_3} v(0, T_3)$ e, dunque, x_{T_1} è equivalente a x_{T_3} , indipendentemente dall'ordine temporale di $T_1, T_2,$ e T_3 .

La definizione di equivalenza finanziaria espressa dall'Equazione (19) può essere formulata anche nel modo seguente: gli importi x_{T_1} e x_{T_2} disponibili rispettivamente ai tempi T_1 e T_2 ($T_1 \neq T_2; T_1, T_2 \geq 0$) sono finanziariamente equivalenti se e solo se essi differiscono per la componente di interessi. Infatti, dall'Equazione (18) segue che x_{T_1} , l'importo equivalente di x_{T_2} , può essere determinato attualizzando x_{T_2} dal tempo T_2 al tempo corrente $t = 0$, eliminando la componente di interessi relativa all'intervallo temporale $[0, T_2]$, e capitalizzando dal tempo $t = 0$ al tempo T_1 l'importo così ottenuto per includere gli interessi relativi all'intervallo $[0, T_1]$.

L'estensione ai flussi di importi è immediata. Anche in questo caso, esiste un unico importo S_T esigibile al tempo $T \geq 0$ che può essere scambiato con il flusso $\mathbf{x} = \{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\}$ di importi disponibili, rispettivamente, ai tempi t_1, t_2, \dots, t_m ($0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$), sulla base delle informazioni contenute nella funzione di sconto $v(0, T)$ senza introdurre opportunità di arbitraggio. Esso è dato da

$$S_T = \frac{1}{v(0, T)} \sum_{k=1}^m x_{t_k} v(0, t_k). \tag{20}$$

Segue, quindi, che un importo S_T esigibile al tempo T e un flusso di importi \mathbf{x} possono essere trasformati l'uno nell'altro senza introdurre opportunità d'arbitraggio se e solo se S_T e \mathbf{x} hanno lo stesso valore attuale,

$$S_T v(0, T) = \sum_{k=1}^m x_{t_k} v(0, t_k). \tag{21}$$

L'Equazione (21) consente di estendere la relazione di equivalenza finanziaria tra singoli importi e flussi di importi e, conseguentemente per la proprietà transitiva, tra (due o più) flussi di importi. Ed è espressivo notare che l'importo S_T , finanziariamente equivalente al flusso \mathbf{x} , si ottiene scontando ogni importo x_{t_k} dal tempo t_k al tempo $t = 0$ per eliminare la componente degli interessi maturati su $[0, t_k]$; la somma dei valori così ottenuti (che non contiene interessi) viene poi capitalizzata dal tempo $t = 0$ al tempo T per includere gli interessi maturati nel periodo $[0, T]$. Risulta, pertanto, agevole quantificare l'ammontare di interessi contenuti in S_T ,

$$S_T - S_T v(0, T), \tag{22}$$

pari alla differenza tra S_T e il suo valore attuale. È questo un risultato importante: un importo esigibile in un'epoca futura incorpora una componente di interessi ben definita e facilmente calcolabile che è univocamente determinata dall'entità dell'importo, dall'istante di esigibilità e dalla funzione di sconto iniziale secondo la formula (22).

Se $T = 0$, L'Equazione (21) coincide con l'Equazione (7) di valutazione a pronti, a confermare che la valutazione a pronti può essere vista come un caso particolare nella valutazione a termine.

2.2.1 La moderna teoria della finanza e la scindibilità

La relazione d'equivalenza finanziaria, determinata dalla conoscenza della funzione di sconto all'istante di valutazione $t = 0$, non è necessariamente conservata agli istanti di tempo successivi. A causa dell'evoluzione temporale imprevedibile della funzione di sconto, importi monetari equivalenti al tempo $t = 0$ possono non esserlo più in istanti di tempo futuri. In un habitat stocastico in cui la struttura dei tassi evolve in condizione di incertezza, perde, dunque, significato (finanziario e matematico) qualunque relazione che tenti di legare la funzione di sconto osservata all'istante di tempo iniziale con la funzione di sconto ad un'epoca futura (non nota, ovviamente al tempo $t = 0$) senza tener conto probabilisticamente dei possibili scenari evolutivi. Un esempio è fornito dalla relazione di scindibilità secondo Cantelli,

$$v(0, T_2) = v(0, T_1)v(T_1, T_2), \quad 0 < T_1 < T_2. \quad (23)$$

Poiché $v(T_1, T_2)$ rappresenta la funzione di sconto all'istante di tempo futuro T_1 , essa è descritta da una variabile aleatoria. E questo rende l'Equazione (23) non consistente in un habitat stocastico. Ma anche se si ipotizzasse, inverosimilmente, di assumere un'evoluzione deterministica della struttura dei tassi, la funzione di sconto che si realizzerà ad un istante di tempo futuro è nota al tempo $t = 0$ e univocamente determinata, per evitare arbitraggi, da

$$v(T_1, T_2) = \frac{v(0, T_2)}{v(0, T_1)}, \quad 0 < T_1 < T_2. \quad (24)$$

Infatti, poiché per definizione $v(T_1, T_2)$ è l'importo monetario disponibile al tempo T_1 (noto al tempo $t = 0$ in un contesto deterministico) equivalente ad un importo unitario esigibile al tempo T_2 , l'Equazione (24) segue dall'Equazione (18) per $x_{T_2} = 1$, qualunque sia la funzione di sconto osservata all'istante di tempo iniziale coerente con l'assenza di opportunità di arbitraggio.



3. GLI INTERESSI SUGLI INTERESSI

Per affrontare appieno la questione della generazione di interessi da interessi occorre considerare che, da un punto di vista finanziario, il debito residuo ad ogni epoca (con l'ovvia eccezione dell'epoca iniziale) ha una componente di interessi ben definita. Tale proprietà non è specifica del regime composto, vale qualunque sia il regime finanziario, regime semplice compreso, perché discende dai principi primi dell'economia e della finanza che abbiamo discusso nella sezione precedente. Vediamo di capirne il motivo.

Si consideri al tempo $t = 0$ un prestito per l'importo S_0 con un piano di rimborso costituito da rate di importi non negativi,

$$\mathbf{r} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}, \quad (25)$$

esigibili ai tempi 1, 2, ..., m, con $R_m > 0$, e soddisfacenti la relazione di equivalenza finanziaria al tempo $t = 0$,

$$S_0 = \sum_{k=1}^m R_k v(0, k). \quad (26)$$

Il debito residuo ad una generica epoca k è, per definizione, l'importo determinato al tempo $t = 0$ ma esigibile al tempo k , che risulta finanziariamente equivalente al flusso di rate non ancora corrisposte a quell'epoca e, come tale, rappresenta il livello dell'indebitamento residuo dopo il pagamento delle prime k rate. È l'importo che consente di chiudere anticipatamente un prestito e che viene preso come riferimento in caso di rimodulazioni eventuali quali sospensioni dei pagamenti, surroghe e rinegoziazioni. Essendo un importo esigibile ad un'epoca futura, il debito residuo incorpora una quantità ben definita di interessi. Sia M_k il debito residuo dopo il pagamento della k -esima rata. Dalla definizione segue che, per evitare opportunità d'arbitraggio, il suo valore deve essere calcolato coerentemente con l'Equazione (20), cioè

$$M_k = \frac{1}{v(0, k)} \sum_{j=k+1}^m R_j v(0, j), \quad (27)$$

con $M_0 = S_0$ e $M_m = 0$ a significar che al tempo $t = 0$ il debito residuo coincide con il capitale erogato S_0 e che al tempo $k = m$, subito dopo il pagamento dell'ultima rata, il debito è estinto. Il debito residuo M_k è dato, dunque, dal valore attuale al tempo $t = 0$ delle rate non ancora corrisposte all'epoca k , valore che viene poi capitalizzato dall'epoca 0 all'epoca k . Il processo di attualizzazione rimuove la componente di interessi presente in ognuna delle rate non ancora pagate all'epoca k , mentre la capitalizzazione dal tempo $t = 0$ all'epoca k include nell'importo così ottenuto (e privo di interessi) gli interessi che maturano nell'intervallo $[0, k]$. Come ogni altro importo esigibile in un'epoca futura, il debito residuo M_k (con l'ovvia eccezione $k = 0$) è una miscela ben definita di capitale e interessi, con un ammontare di interessi pari alla differenza $M_k - M_k v(0, k)$, in accordo con la formula (22).

Del debito residuo è possibile fornire rappresentazioni distinte, ma equivalenti, che possono essere utili nella costruzione dei piani d'ammortamento dei prestiti. Infatti, oltre alla rappresentazione *prospettiva* descritta dall'Equazione (27), è possibile dare una rappresentazione *retrospettiva* in funzione del capitale erogato e delle rate corrisposte dal tempo $t = 0$ all'epoca k , cioè

$$M_k = \frac{1}{v(0, k)} \left(S_0 - \sum_{j=1}^k R_j v(0, j) \right). \quad (28)$$

Per la dimostrazione è sufficiente sostituire l'Equazione (26) nell'Equazione (27). Infine, il debito residuo può essere espresso in una forma ricorsiva che mette in relazione il

debito residuo ad una determinata epoca al debito residuo all'epoca precedente. Infatti si ha,

$$M_k = M_{k-1} + j(0, k - 1, k)M_{k-1} - R_k, \tag{29}$$

dove le quantità

$$j(0, k - 1, k) = \frac{v(0, k - 1)}{v(0, k)} - 1, \tag{30}$$

rappresentano i tassi a termine, o tassi impliciti, uniperiodali. Anche in questo caso la dimostrazione è immediata a partire dalle rappresentazioni prospettive di M_k e M_{k-1} . L'interpretazione finanziaria dell'Equazione (29) risulta particolarmente espressiva: il debito residuo ad una determinata epoca k è pari al valore del debito residuo all'epoca precedente $k - 1$ accresciuto degli interessi maturati nel periodo $[k - 1, k]$, la cosiddetta quota interessi,

$$I_k = j(0, k - 1, k)M_{k-1}, \tag{31}$$

e diminuito dell'importo della rata R_k in scadenza all'epoca k .

Le Equazioni (29) e (31) costituiscono le relazioni di base per la costruzione del piano d'ammortamento di un prestito. Definendo, infatti, le quote di capitale, o quote d'ammortamento (Ottaviani, 1988), C_k , pari alla differenza tra il valore del debito residuo all'epoca $k - 1$ e il valore del debito residuo all'epoca k , cioè

$$C_k = M_{k-1} - M_k, \tag{32}$$

dall'Equazione (29) è possibile ottenere la decomposizione della rata nella quota di capitale e nella quota interessi,

$$R_k = C_k + I_k. \tag{33}$$

Nonostante nella letteratura finanziaria la grandezza l_k sia denominata quota interessi, è importante non identificare l_k con il contenuto di interessi presenti nella rata R_k e che vengono pagati con la corresponsione della rata stessa. Infatti, l'Equazione (31) mostra che l_k misura l'ammontare di interessi che maturano nell'intervallo temporale $[k - 1, k]$, mentre il contenuto di interessi della rata R_k è dato, in accordo con la formula (22), dalla differenza tra l'importo della rata stessa e il suo valore attuale, cioè $R_k - R_k v(0, k)$. La distinzione tra interessi maturati e interessi pagati è importante per capire il processo di generazione degli interessi e il loro fluire nel tempo (Mari e Aretusi, 2019; Mari, 2024). Parimenti, la quota di capitale che, per definizione misura la variazione di debito residuo nel tempo così come descritta dall'Equazione (32), non può essere interpretata finanziariamente come un importo di puro capitale, essendo data dalla differenza di due quantità finanziarie esigibili in epoche diverse e, pertanto, con contenuti diversi di interessi. Per questo motivo il termine quota di ammortamento ci sembra più appropriato del termine quota di capitale.

Il piano di ammortamento di un prestito è descritto da una tabella che riporta sinotticamente tutte le informazioni finanziarie rilevanti sul prestito. Nella forma standard, la tabella è costituita da $m + 1$ righe in corrispondenza dei valori $k = 0, 1, \dots, m$, nelle quali sono riportati i vettori

$$\phi_k = \{k, R_k, C_k, I_k, M_k\}, \tag{34}$$

con $\phi_0 = \{0, 0, 0, 0, S_0\}$. Tutte le quantità finanziarie contenute nei vettori ϕ_k possono essere facilmente calcolate seguendo l'approccio presentato. Assegnato, ad esempio, un piano di rimborso a copertura di un importo S_0 erogato al tempo $t = 0$, costituito da rate di importi non negativi R_1, R_2, \dots, R_m esigibili ai tempi $1, 2, \dots, m$, con $R_m > 0$, soddisfacenti la condizione di equivalenza finanziaria (26), è possibile costruire il piano d'ammortamento calcolando dapprima le quote di capitale $C_k = R_k - I_k$ e successivamente il debito residuo $M_k = M_{k-1} - C_k$ ($M_0 = S_0$). In maniera analoga, assegnate m quote di capitale soddisfacenti la condizione di chiusura aritmetica

$$S_0 = \sum_{k=1}^m C_k, \tag{35}$$

è possibile costruire il piano d'ammortamento calcolando gli importi della rate $R_k = C_k + I_k$ e il debito residuo $M_k = M_{k-1} - C_k$ ($M_0 = S_0$).

3.1 Anatocismo nel regime composto

Nel regime composto la funzione di sconto è descritta dall'Equazione (8). In questo regime i tassi a termine uniperiodali sono costanti,

$$j(0, k - 1, k) = i, \tag{36}$$

come è immediato verificare applicando l'Equazione (30). È l'unico regime finanziario che gode di questa proprietà⁵. Questa proprietà ha importanti implicazioni. La presenza di una componente di interessi nel debito residuo fa sì che le quote interessi (con l'ovvia eccezione della prima), calcolate in base all'Equazione (31),

$$I_k = iM_{k-1}, \tag{37}$$

incorporino una componente anatocistica. Infatti, moltiplicando il tasso di interesse per il debito residuo all'epoca precedente, nelle quote interessi confluiscono interessi da interessi generando anatocismo. La componente anatocistica è facilmente calcolabile secondo la formula

⁵ Dalla definizione di tassi impliciti uniperiodali descritta dall'Equazione (30), si ottiene $m(0, k) = m(0, k - 1)(1 + i)$, equazione che sotto la condizione iniziale $m(0, 0) = 1$ ammette l'unica soluzione $m(0, k) = (1 + i)^k$, cioè

$$v(0, k) = \frac{1}{(1 + i)^k}.$$

$$CA_k = i \left[M_{k-1} - \frac{M_{k-1}}{(1+i)^{k-1}} \right], \tag{38}$$

che si ottiene moltiplicando il tasso i per l'ammontare di interessi presenti in M_{k-1} che è pari alla differenza tra M_{k-1} e il suo valore attuale.

3.2 Assenza di anatocismo nel regime semplice con chiusura iniziale

Nel regime semplice con chiusura iniziale la funzione di sconto è descritta dall'Equazione (9). A differenza del regime composto, in questo caso i tassi a termine uniperiodali non sono costanti ma sono dati da

$$j(0, k - 1, k) = \frac{i}{1 + i(k - 1)}, \tag{39}$$

come è immediato verificare applicando l'Equazione (30). Questa proprietà ha importanti implicazioni. Infatti, le quote interessi, calcolate in base all'Equazione (31),

$$I_k = i \frac{M_{k-1}}{1 + i(k - 1)}. \tag{40}$$

mostrano un'interessante proprietà: le quote interessi non sono calcolate moltiplicando il tasso di interesse per il debito residuo all'epoca precedente come nel regime composto, ma sono calcolate moltiplicando il tasso di interesse per il valore attuale del debito residuo all'epoca precedente. L'attualizzazione rimuove la componente di interessi dal debito residuo, precludendo qualsiasi possibilità di composizione degli interessi nel tempo. In questo senso è possibile affermare che l'attualizzazione del debito residuo nel calcolo della quota interessi rende "improduttivi" gli interessi presenti nel debito residuo stesso. Ed è importante sottolineare che il regime semplice con chiusura iniziale è l'unico regime finanziario in cui gli interessi che maturano in un generico intervallo $[k - 1, k]$ sono dati da una percentuale assegnata, i (costante), del valore attuale del debito residuo all'inizio dell'intervallo, M_{k-1} , cioè

$$I_k = iv(0, k - 1)M_{k-1}. \tag{41}$$

La dimostrazione di questo importante risultato prende lo spazio di una nota⁶.

6 Dalla definizione di quota interessi segue $j(0, k - 1, k) = iv(0, k - 1)$ da cui, tenendo conto dell'Equazione (30), si ottiene $m(0, k) = m(0, k - 1) + i$, equazione che sotto la condizione iniziale $m(0, 0) = 1$ ammette l'unica soluzione $m(0, k) = 1 + ik$, cioè

$$v(0, k) = \frac{1}{1 + ik}.$$

3.3 Anatocismo e regime semplice con chiusura finale

Per poter affrontare il problema nel regime semplice con chiusura finale è necessario partire dalla relazione di "equità" in questo regime⁷ espressa da,

$$M_k(1 + i(m - k)) = \sum_{j=k+1}^m R_j(1 + i(m - j)), \quad (42)$$

che assicura che il valore del debito residuo all'epoca k capitalizzato linearmente dall'epoca k all'epoca m sia uguale alla somma degli importi delle rate da corrispondere dopo l'epoca k capitalizzati dall'epoca di esigibilità delle stesse all'epoca m . Dall'Equazione (42) discende la relazione ricorsiva

$$M_k = M_{k-1} + \frac{iM_{k-1}}{1 + i(m - k)} - R_k, \quad (43)$$

che fornisce la decomposizione della rata $R_k = C_k + I_k$ nella quota di capitale

$$C_k = M_{k-1} - M_k, \quad (44)$$

e nella quota interessi

$$I_k = \frac{iM_{k-1}}{1 + i(m - k)}. \quad (45)$$

Decisamente importanti sono le implicazioni. Infatti, l'ultima quota interessi, quella per $k = m$, è data, esattamente come nel regime composto, da

$$I_m = iM_{m-1}. \quad (46)$$

Essendo M_{m-1} un importo esigibile ad un'epoca futura (con l'ovvia eccezione di $m = 1$), la presenza di una componente di interessi fa sì che l'ultima quota interessi, calcolata moltiplicando il tasso di interesse per M_{m-1} , contenga una componente anatocistica di interessi da interessi. Tale componente è facilmente calcolabile perché si ottiene moltiplicando il tasso i per l'ammontare di interessi presenti in M_{k-1} che è pari alla differenza tra M_{k-1} e il suo valore attuale.

$$CA_m = i(M_{m-1} - M_{m-1}v(0, m - 1; m)) = \frac{i^2(m - 1)}{1 + im} M_{m-1}. \quad (47)$$

⁷ In riferimento alla costruzione ad interessi semplici con chiusura finale preferiamo inserire il termine equità tra virgolette per via dell'inconciliabilità di questo approccio con l'assenza di arbitraggio.

4. LARIMODULAZIONE DI UN PRESTITO

La contrattualistica attuale prevede la possibilità di rimodulare il piano di rimborso di un prestito durante la sua vita operativa. Sospensioni di pagamento per un periodo di tempo determinato, variazioni della vita residua del prestito e dei piani di rimborso, rinegoziazioni e altre modifiche aumentano la flessibilità dell'operazione e ne riducono il rischio di default. Le rimodulazioni di un prestito possono essere valutate agevolmente da un punto di vista economico e finanziario nell'ambito della trattazione esposta. Il punto centrale è la conservazione dell'equità finanziaria dell'operazione di rimodulazione nel suo complesso, in modo tale da assicurare l'assenza di opportunità di arbitraggio. Se \bar{k} è l'epoca in cui interviene la rimodulazione subito dopo il pagamento della rata \bar{k} -esima, la condizione di equità richiede che debba essere soddisfatta la relazione seguente,

$$M_{\bar{k}} = \frac{1}{v(0, \bar{k})} \sum_{j=\bar{k}+1}^n R'_j v(0, j), \quad (48)$$

dove con n abbiamo indicato l'eventuale nuova scadenza del prestito che, ovviamente, potrà essere diversa da m , e con R'_j gli importi del piano di rimborso rimodulato. L'Equazione (48) assicura l'assenza di opportunità di arbitraggio nel processo di rimodulazione e fornisce la base matematica per la definizione del nuovo piano di rimborso (anche nel caso di rinegoziazione del valore del tasso periodale effettivo). Il caso regime del semplice con chiusura finale necessita di una trattazione specifica per via della dipendenza della funzione di sconto dalla scadenza (non coerente con l'argomento di arbitraggio) e vedremo, con esempi significativi, che i processi di rimodulazione che alterano la scadenza del prestito generano situazioni di violazione della condizione di "equità" inconciliabili con la legge degli interessi semplici.

Discuteremo il caso della rimodulazione di un prestito a seguito di sospensione dei pagamenti per un periodo definito, nell'ipotesi che durante il periodo di sospensione vengano corrisposte solamente le quote interessi. La scelta di questo esempio, tra gli infiniti che avremmo potuto presentare, è dovuta al fatto che in un articolo recente (Annibaldi et al., 2024) il problema è stato posto all'attenzione dei lettori ma non è stato compiutamente e adeguatamente affrontato.

Si consideri un prestito per l'importo $S = 100$ da rimborsare in $n = 5$ rate costanti pagabili ai tempi $k = 1, 2, \dots, 5$. Si supponga che i pagamenti vengano sospesi per due periodi all'epoca $\bar{k} = 3$ dopo il pagamento della terza rata. Durante il periodo di sospensione vengono corrisposte le quote interessi e il piano di rimborso viene rimodulato a rate costanti (eventualmente di importo diverso da quello delle rate da corrispondere prima del periodo di sospensione).

4.1 Sospensione nel regime composto

Si consideri il problema della sospensione in regime composto al tasso periodale effettivo $i = 10\%$. Applicando l'Equazione (48) si ricava che l'importo costante delle rate di rimborso da corrispondere dopo il periodo di sospensione è uguale a quello delle rate previste prima

della sospensione. Il piano d'ammortamento del prestito originario è presentato a sinistra nella Tabella 1 mentre il piano d'ammortamento del prestito rimodulato è riportato a destra.

Tabella 1: Regime composto. A sinistra: il piano d'ammortamento originario. A destra: il piano d'ammortamento con sospensione.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	26.38	16.38	10.00	83.62
2	26.38	18.02	8.36	65.60
3	26.38	19.82	6.56	45.78
4	26.38	21.80	4.58	23.98
5	26.38	23.98	2.40	0

k	R'_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	26.38	16.38	10.00	83.62
2	26.38	18.02	8.36	65.60
3	26.38	19.82	6.56	45.78
4	4.58	0.00	4.58	45.78
5	4.58	0.00	4.58	45.78
6	26.38	21.80	4.58	23.98
7	26.38	23.98	2.40	0

Si verifica immediatamente che la condizione di equità del nuovo piano di rimborso è conservata (la somma dei valori attuali delle 7 rate di rimborso in regime composto al 10% è pari a 100 o, equivalentemente, il montante all'epoca finale delle rate di rimborso è pari a 194.87 coerentemente con il montante dell'importo iniziale $S_0 = 100$ in regime composto che è anch'esso pari a 194.87) come è conservata la condizione di chiusura aritmetica del piano (la somma delle 7 quote di capitale è pari a 100).

4.2 Sospensione nel regime semplice con chiusura iniziale

Lo stesso problema affrontato in regime semplice con chiusura iniziale al tasso periodale effettivo $i = 10\%$ conduce al piano d'ammortamento presentato nella Tabella 2, dove a sinistra è riportato il piano d'ammortamento del prestito originario e a destra quello del prestito rimodulato.

Tabella 2: Regime semplice con chiusura iniziale. A sinistra: il piano d'ammortamento originario. A destra: il piano d'ammortamento con sospensione.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	25.69	15.69	10.00	84.31
2	25.69	18.03	7.66	66.29
3	25.69	20.17	5.52	46.12
4	25.69	22.14	3.55	23.98
5	25.69	23.98	1.71	0

k	R'_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	25.69	15.69	10.00	84.31
2	25.69	18.03	7.66	66.29
3	25.69	20.17	5.52	46.12
4	3.55	0.00	3.55	46.12
5	3.29	0.00	3.29	46.12
6	25.34	22.27	3.07	23.85
7	25.34	23.85	1.49	0

In questo caso, l'applicazione dell'Equazione (48) determina un valore dell'importo delle rate di rimborso da corrispondere dopo il periodo di sospensione diverso, stretta-

mente minore di quello delle rate previste prima della sospensione. È, ovviamente, una condizione necessaria che assicura sia l'assenza di arbitraggio sia l'assenza di anatocismo. Anche in questo caso si verifica immediatamente che la condizione di equità del nuovo piano di rimborso è conservata (la somma dei valori attuali delle 7 rate di rimborso in regime semplice con chiusura iniziale al 10% è pari a 100 o, equivalentemente, il montante all'epoca finale delle rate di rimborso è pari a 170 coerentemente con il montante dell'importo iniziale $S_0 = 100$ nel regime semplice che è anch'esso pari a 170) come è conservata la condizione di chiusura aritmetica del piano (la somma delle 7 quote di capitale è pari a 100).

4.3 Sospensione nel regime semplice con chiusura finale

Per poter affrontare il problema nel regime semplice con chiusura finale è necessario partire dalla relazione di "equità",

$$M_{\bar{k}} \left(1 + i(n - \bar{k}) \right) = \sum_{j=\bar{k}+1}^n R'_j (1 + i(n - j)) \tag{49}$$

che assicura che il valore del debito residuo all'epoca di sospensione \bar{k} capitalizzato linearmente dall'epoca \bar{k} all'epoca n sia uguale alla somma degli importi delle rate da corrispondere dopo l'epoca \bar{k} capitalizzati dall'epoca di esigibilità delle stesse all'epoca n . Per la costruzione della parte di piano d'ammortamento rimodulato possiamo procedere calcolando dapprima le quote interessi per $k \geq \bar{k} + 1$

$$I_k = \frac{iM_k}{1 + (n - k)i}, \tag{50}$$

e, successivamente, determinando l'importo costante delle rate da corrispondere dopo il periodo di sospensione tramite l'Equazione (49). Come nel regime composto, l'importo costante delle rate di rimborso da corrispondere dopo il periodo di sospensione è uguale a quello delle rate previste prima della sospensione. La Tabella 3 presenta, a sinistra, il piano d'ammortamento del prestito originario e, a destra, il piano d'ammortamento del prestito rimodulato, nell'ipotesi che il tasso periodale effettivo sia $i = 10\%$.

Tabella 3: Regime semplice con chiusura finale. A sinistra: il piano d'ammortamento originario. A destra: il piano d'ammortamento con sospensione.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	25.00	17.86	7.14	82.14
2	25.00	18.68	6.32	63.46
3	25.00	19.71	5.29	43.75
4	25.00	21.02	3.98	22.73
5	25.00	22.73	2.27	0

k	R'_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	25.00	17.86	7.14	82.14
2	25.00	18.68	6.32	63.46
3	25.00	19.71	5.29	43.75
4	3.37	0.00	3.37	43.75
5	3.65	0.00	3.65	43.75
6	25.00	21.02	3.98	22.73
7	25.00	22.73	2.27	0

A parte l'anomalia delle quote interessi crescenti durante il periodo di sospensione, è importante evidenziare che la condizione di "equità" del nuovo piano di rimborso espressa da

$$S_0(1 + in) = \sum_{k=1}^n R'_k(1 + i(n - k)), \quad (51)$$

non è conservata. Com'è, infatti, immediato verificare il membro di sinistra vale 170 (coerentemente con la legge degli interessi semplici) mentre il membro di destra vale 173.5. Equivalentemente, la somma dei valori attuali delle rate di rimborso calcolati con la funzione di sconto $v(0, T; t_n)$ non è uguale al capitale mutuato $S_0 = 100$. Rispetto al piano originario, il periodo di sospensione trasforma un'operazione finanziaria "equa" in un'operazione finanziaria non più equa e con oneri maggiorati per il mutuatario rispetto alla situazione originaria. La condizione di chiusura aritmetica del piano è invece conservata (la somma delle 7 quote di capitale è pari a 100). Ma questo non è tutto. Il motivo del perché l'intero piano rimodulato non sia consistente con il regime semplice con chiusura finale $n = 7$ è evidente: una parte del piano (sino all'epoca $k = 3$) è stata costruita utilizzando quale epoca finale $m = 5$, mentre la parte rimanente del piano è stata costruita utilizzando l'epoca finale $n = 7$. Complessivamente il piano rimodulato risulta costruito secondo la funzione di sconto seguente,

$$v(0, k; m, \bar{k}, n) = \begin{cases} \frac{1 + i(m - k)}{1 + im} & k \leq \bar{k} \\ \frac{1 + i(m - \bar{k})}{1 + im} \frac{1 + i(n - k)}{1 + i(n - \bar{k})} & k > \bar{k}. \end{cases} \quad (52)$$

che dipende dai tre parametri m , \bar{k} e n . Ed è come utilizzare un regime diverso a seconda dell'epoca e della durata della sospensione. Con questa singolare funzione di sconto si verifica immediatamente che la somma dei valori attuali delle 7 rate di rimborso è pari a 100 ed è conservata la condizione di chiusura aritmetica del piano (la somma delle 7 quote di capitale è pari a 100). Tuttavia, la somma delle rate capitalizzate all'epoca finale $n = 7$ vale 175 e non 170 come avrebbe dovuto essere in coerenza con la legge degli interessi semplici.

5. "TRASMUTAZIONI" FINANZIARIE

“La capitalizzazione semplice a tasso annuo costante non è che una capitalizzazione composta a tasso variabile”. L'espressione, attribuita a Filadelfo Insolera (Annibali et al., 2024), per quanto possa apparire d'effetto nel dibattito attuale, non presenta contenuti finanziari particolarmente significativi se non l'ovvia considerazione che uno scambio tra 100 oggi e 120 euro tra due anni è un'operazione equa in regime semplice al tasso costante $i = 10\%$ come è altrettanto equa in regime composto ai tassi $i_1 = 10\%$ e $i_2 = 9.09\%$ riferiti, rispettivamente, al primo e al secondo anno dell'o-

perazione. E questo non vuol dire che operazioni finanziarie in regime semplice a tasso costante incorporino componenti anatocistiche. Significa semplicemente dire che una cosa è dichiarare che lo scambio avviene in regime semplice al 10% e come tale non include interessi su interessi, in quanto gli interessi sono sempre e solo calcolati al 10% sul capitale iniziale di 100 sia nel primo anno sia nel secondo anno dell'operazione, un'altra cosa è dichiarare che il prestito si svolge in regime composto al 10% nel primo anno e al 9.09% nel secondo anno, dove la riduzione del tasso nel secondo anno è dovuta alla componente anatocistica di calcolo degli interessi al 9.09% sull'importo di 110, cioè sul capitale iniziale e sugli interessi maturati nel primo anno dell'operazione.

Vale, ovviamente, anche il viceversa e possiamo dire che la capitalizzazione composta a tasso costante non è che una capitalizzazione in regime semplice a tasso variabile. Infatti, uno scambio tra 100 oggi e 121 euro tra due anni è un'operazione equa in regime composto al tasso costante $i = 10\%$, come è altrettanto equa in regime semplice ai tassi $i_1 = 10\%$ e $i_2 = 11\%$ riferiti, rispettivamente, al primo e al secondo anno dell'operazione. La differenza è macroscopica nel significato finanziario: nel primo caso sto facendo pagare al tasso del 10% anche gli interessi maturati nel primo anno; nel secondo caso sto dichiarando di far pagare interessi al 10% nel primo anno e all'11% nel secondo anno sempre e solo sul capitale iniziale di 100. Tuttavia, per evitare fraintendimenti e interpretazioni singolari, approfondiremo di seguito la questione anche nel caso dei prestiti a rimborso graduale.

5.1 Rappresentazioni ad interessi variabili

A tassi variabili, le rappresentazioni analitiche delle funzioni di sconto nel regime composto e nel regime semplice con chiusura iniziale sono date rispettivamente da,

$$v(0, k) = \frac{1}{\prod_{j=1}^k (1 + i_j^c)}, \tag{53}$$

e

$$v(0, k) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^k i_j^s}, \tag{54}$$

La *ratio* è che nel regime composto gli interessi che maturano nel periodo $[k - 1, k]$ sono calcolati sul montante all'epoca $k - 1$ mentre nel regime semplice sono calcolati sul capitale iniziale⁸. Applicando l'Equazione (31) si ottengono le quote interessi,

$$I_k = i_k^c M_{k-1}, \tag{55}$$

⁸ Infatti, le equazioni

$$\begin{aligned} m(0, k) &= m(0, k - 1) + i_k m(0, k - 1), \\ m(0, k) &= m(0, k - 1) + i_k, \end{aligned}$$

unitamente alla condizione iniziale $m(0, 0) = 1$, ammettono le uniche soluzioni descritte, rispettivamente, dalle Equazioni (53) e (54).

$$I_k = i_k^s \frac{M_{k-1}}{1 + \sum_{j=1}^{k-1} i_j^s}, \tag{56}$$

rispettivamente nel regime composto e nel regime semplice con chiusura iniziale. Nel regime composto le quote interessi sono calcolate moltiplicando il tasso (variabile) per il debito residuo all'epoca precedente generando interessi da interessi, mentre nel regime semplice con chiusura iniziale, le quote interessi si calcolano moltiplicando il tasso (variabile) per il valore attuale del debito residuo, precludendo ogni possibilità di composizione degli interessi nel tempo. Anche nel caso di tassi variabili, la rappresentazione in regime semplice descritta dall'Equazione (54) è l'unico regime finanziario in cui gli interessi che maturano in un generico intervallo $[k - 1, k]$ sono dati da una percentuale assegnata, i_k^s , del valore attuale del debito residuo all'inizio dell'intervallo M_{k-1} , cioè

$$I_k = i_k^s v(0, k - 1) M_{k-1}. \tag{57}$$

La dimostrazione di questo importante risultato prende lo spazio di una nota⁹.

5.2 "Trasmutazioni" finanziarie di prestiti a rimborso graduale

Mostreremo che un prestito in regime semplice (sia con chiusura iniziale sia con chiusura finale) può essere visto anche come un prestito in regime composto a tassi variabili e, viceversa, che un prestito in regime composto a tasso costante può essere visto come un prestito in regime semplice a tassi variabili.

Si consideri un prestito per l'importo $S = 100$ da rimborsare in $n = 5$ rate costanti pagabili ai tempi $k = 1, 2, \dots, 5$. Supponiamo di costruire il prestito in regime semplice con chiusura iniziale al tasso periodale effettivo $i = 10\%$. Il piano d'ammortamento è presentato a sinistra nella Tabella 2. Come è facile verificare, lo stesso piano d'ammortamento si può ottenere in regime composto ai tassi variabili riportati nella Tabella 4, univocamente determinati dalla relazione

$$i_k^c = \frac{i}{1 + (k - 1)i}. \tag{58}$$

Tabella 4: La sequenza dei tassi variabili nel regime composto.

k	1	2	3	4	5
i_k^c	10.00%	9.09%	8.33%	7.69%	7.14%

Ma una cosa è dichiarare che il prestito è al 10% in regime semplice, il che implica assenza di fenomeni anatocistici, un'altra cosa è dichiarare che il prestito è a tassi variabili decrescenti minori strettamente del 10% (ad eccezione del primo), omettendo magari di

9 Dalla definizione di quota interessi segue $j(0, k - 1, k) = i_k^s v(0, k - 1)$ da cui, tenendo conto dell'Equazione (30), si ottiene $m(0, k) = m(0, k - 1) + i_k^s$, equazione che sotto la condizione iniziale $m(0, 0) = 1$ ammette l'unica soluzione $m(0, k) = 1 + \sum_{j=1}^k i_j^s$, cioè

$$v(0, k) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^k i_j^s}.$$

dichiarare che il regime finanziario sottostante è quello dell'interesse composto in cui, in accordo con l'Equazione (55), le quote interessi si calcolano moltiplicando il tasso dichiarato per il debito residuo all'epoca precedente, generando interessi da interessi. La trasparenza nella comunicazione finanziaria è un requisito imprescindibile.

Considerazioni analoghe valgono anche nel caso dei prestiti in regime semplice con chiusura finale. In questo caso e nell'ipotesi che il tasso periodale effettivo sia ancora $i = 10\%$, il piano d'ammortamento risulta quello presentato a sinistra nella Tabella 3. Come è facile verificare, lo stesso piano d'ammortamento si può ottenere in regime composto ai tassi variabili riportati nella Tabella 5, univocamente determinati dalla relazione

$$i_k^c = \frac{i}{1 + (m - k)i}. \tag{59}$$

Tabella 5: La sequenza dei tassi variabili nel regime composto.

k	1	2	3	4	5
i_k^c	7.14%	7.69%	8.33%	9.09%	10.00%

Mostriamo, infine, il viceversa. La Tabella 1 riporta a sinistra il piano d'ammortamento in regime composto al tasso periodale effettivo $i = 10\%$ del prestito considerato. Lo stesso piano d'ammortamento si può ottenere in regime semplice con chiusura iniziale ai tassi variabili riportati nella Tabella 6, univocamente determinati (imponendo l'uguaglianza ai tempi $k = 1, 2, \dots, m$ della funzione di sconto in regime composto a tasso costante e la funzione di sconto in regime semplice con chiusura iniziale a tassi variabili) dalla relazione

$$i_k^s = i(1 + i)^{k-1}. \tag{60}$$

Tabella 6: La sequenza dei tassi variabili nel regime semplice con chiusura iniziale.

k	1	2	3	4	5
i_k^s	10.00%	11.00%	12.10%	13.31%	14.64%

Per non appesantire la trattazione, lasciamo al lettore l'esercizio di sviluppare la conversione dal regime composto al regime semplice con chiusura finale.

Sebbene l'argomento abbia scarsa rilevanza finanziaria nel caso dei prestiti in regime composto (a tasso costante) o in regime semplice (a tasso costante), esso può assumere un significato importante nel caso di prestiti costruiti secondo leggi finanziarie arbitrarie (Mari, 2024). Infatti, è sempre possibile rappresentare una funzione di sconto arbitraria sia secondo lo schema ad interesse composto con tassi variabili descritto dall'Equazione (53) con una sequenza di tassi $\{i_{k|k=1}^c\}^m$ univocamente determinata, data da

$$i_k^c = \frac{v(0, k - 1)}{v(0, k)} - 1, \tag{61}$$

sia secondo lo schema dell'interesse semplice con tassi variabili descritto dall'Equazione (54) con una sequenza di tassi $\{i_{k|k=1}^s\}^m$ univocamente determinata, data da

$$i_k^s = \frac{1}{v(0, k)} - \frac{1}{v(0, k - 1)}. \tag{62}$$

A titolo di esempio, la Tabella 7 mostra nella prima riga i valori di una funzione di sconto assegnata (limitatamente alle epoche $k = 1, 2, \dots, 5$) e, nelle due righe successive, le sequenze di tassi $\{i_{kj}^c\}_{k=1}^5$ e $\{i_{kj}^s\}_{k=1}^5$.

Tabella 7: Le sequenze dei tassi variabili.

k	1	2	3	4	5
$v(0, k)$	0.9346	0.8573	0.7513	0.7084	0.6560
i_k^c	7.00%	9.02%	14.11%	6.06%	7.99%
i_k^s	7.00%	9.65%	16.46%	8.06%	11.28%

Il piano d'ammortamento di un prestito per l'importo $S_0 = 100$ strutturato a rate costanti secondo la funzione di sconto assegnata è descritto nella Tabella 8.

Tabella 8: Il piano d'ammortamento.

k	R'_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	25.59	18.59	7.00	81.41
2	25.59	18.25	7.34	63.16
3	25.59	16.68	8.91	46.47
4	25.59	22.78	2.81	23.70
5	25.59	23.70	1.89	0

Tuttavia, occorre prestare molta attenzione a fornire agli utenti finali informazioni accurate sulla rappresentazione dello schema finanziario e sui tassi utilizzati, in modo da evitare anatocismo che, come abbiamo visto, è presente nella rappresentazione (53) ma non nella rappresentazione (54). Dichiarare, pertanto, che il prestito in questione si svolge in regime composto con tassi dati dalla sequenza $\{i_{kj}^c\}_{k=1}^5$ riportata nella Tabella 7, significa includere interessi da interessi nel processo di valutazione. Al contrario, lo stesso prestito in regime semplice con tassi dati dalla sequenza $\{i_{kj}^s\}_{k=1}^5$ riportata nella Tabella 7 non presenta fenomeni di anatocismo.

5.3 I prestiti "bullet"

Un prestito cosiddetto "bullet" è definito dallo scambio di importo positivo S_0 disponibile al tempo $t = 0$ con una successione di pagamenti periodici positivi di ammontari pari agli interessi maturati in ogni periodo, calcolati linearmente al tasso i ($i > 0$) sul capitale S_0 , più il rimborso di un ammontare pari al capitale S_0 alla scadenza, cioè

$$r = \{iS_0, iS_0, \dots, iS_0 + S_0\}, \tag{63}$$

esigibili, rispettivamente, ai tempi 1, 2, ..., m . In questa tipologia di prestiti il debito residuo ad ogni epoca, con l'ovvia eccezione dell'ultima, è costante e pari a S_0 . La regola di calcolo della quota interessi è, dunque, data dal prodotto del tasso per il debito residuo all'epoca precedente e, per questo motivo, è un prestito in regime composto al tasso periodale effettivo i , essendo il regime composto l'unico regime finanziario con tassi impliciti uniperiodali costanti. Tuttavia, per quanto è stato esposto precedentemente, un prestito "bullet" può essere valutato anche in regime semplice, ovviamente non a tasso costante ma a tassi variabili. Ad esempio, in riferimento ad un prestito "bullet" per un importo $S_0 = 100$ al tasso $i = 10\%$ da rimborsare in $m = 5$ rate, la successione dei tassi riportati nella Tabella 6 consente di riprodurre perfettamente il prestito e il suo piano d'ammortamento.

Nel regime semplice è certamente possibile progettare prestiti caratterizzati dalla corresponsione ad ogni periodo di importi pari agli interessi maturati più il rimborso alla scadenza di un importo pari al capitale erogato. Nel caso della chiusura iniziale, un prestito siffatto avrebbe il seguente piano di rimborso

$$r = \left\{ iS_0, i \frac{S_0}{1+i}, i \frac{S_0}{1+2i}, \dots, i \frac{S_0}{1+(m-1)i} + S_0 \right\}, \tag{64}$$

rispettivamente ai tempi 1, 2, 3, ..., m . Un tale piano di rimborso è diverso da quello descritto dall'Equazione (63) e come tale non identifica un prestito "bullet". A titolo di esempio, se $i = 10\%$, $S_0 = 100$ e $m = 5$, il piano di rimborso è dato da

$$r = \{10, 9.09, 8.33, 7.69, 7.14 + 100\}, \tag{65}$$

e non è un prestito "bullet" in quanto il piano di rimborso del prestito "bullet" con parametri $i = 10\%$, $S_0 = 100$ e $m = 5$ è dato da

$$r = \{10, 10, 10, 10, 10 + 100\}. \tag{66}$$

6. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Occorre prendere atto che se la moderna teoria della finanza ha, da un lato, consolidato alcune modellizzazioni classiche, dall'altro ha rivoluzionato impostazioni e costruzioni di base della matematica finanziaria. I tassi di interesse “variable and unpredictable” e il principio di assenza di arbitraggio hanno cambiato radicalmente l'approccio alla valutazione delle obbligazioni. Questo processo di ammodernamento ha investito anche il processo di valutazione dei prestiti e ha favorito lo sviluppo di una teoria generale dell'ammortamento consistente con regimi finanziari arbitrari, regime semplice incluso. E nell'ambito del regime semplice, esiste un'unica rappresentazione coerente con il principio di assenza di opportunità di arbitraggio, quella con chiusura iniziale.

La costruzione ad interesse semplice con chiusura finale, oltre all'inconciliabilità con l'argomento di arbitraggio, mostra ulteriori, limiti. Alcuni di essi li abbiamo illustrati in grande dettaglio in uno scritto recente (Mari e Aretusi, 2023) a cui rimandiamo per approfondimenti. Di altri abbiamo discusso in questo lavoro.

In particolare, abbiamo dimostrato come tale approccio non sia immune dal generare fenomeni anatocistici. Nello specifico, abbiamo visto che l'ultima quota interessi si calcola moltiplicando il tasso periodale effettivo per il debito residuo all'epoca precedente, proprio come nel regime composto. Poiché nel debito residuo sono presenti interessi, questo processo genera interessi da interessi. Qualcuno potrebbe obiettare che anche nella costruzione ad interessi semplici con chiusura iniziale la prima quota interessi si calcola moltiplicando il tasso periodale effettivo per il debito residuo all'epoca precedente, proprio come nel regime composto. Ma la differenza è sostanziale perché in questo caso il debito residuo su cui si calcola la prima quota interessi è il capitale iniziale che, ovviamente, non contiene interessi. Non solo, ma abbiamo anche dimostrato che l'unico regime finanziario consistente con l'assenza di anatocismo è il regime semplice con chiusura iniziale perché ad ogni stadio del piano d'ammortamento, le quote interessi si calcolano sul valore attuale del debito residuo, cioè su un importo depurato della componente interessi, precludendo ogni possibilità di composizione degli interessi nel tempo. E questa proprietà vale anche nel caso di tassi variabili.

Infine, abbiamo visto che l'utilizzo della costruzione ad interessi semplici con chiusura finale mostra gravi limiti nella valutazione delle rimodulazioni dei prestiti nelle quali viene variata la scadenza del prestito, mostrando violazioni della condizione di “equità” e altre gravi incoerenze con la legge degli interessi semplici.

A sostegno della rappresentazione ad interessi semplici con chiusura finale vengono evocati riferimenti a due autori classici, Maria Caliri e Giuseppe Varoli, che secondo alcune ricostruzioni (Annibali et al., 2024) avrebbero mostrato una preferenza per questo approccio rispetto alla costruzione ad interessi semplici con chiusura iniziale. Leggiamo insieme, al riguardo, il pensiero di questi autori¹⁰.

¹⁰ Il lettore interessato può trovare una scansione delle citazioni tratte dai testi di Maria Caliri e Giuseppe Varoli presentate in questa sezione nel sito www.robynhodeitalia.it

“La caratteristica della capitalizzazione semplice è che gli interessi si rendono disponibili solo alla fine del periodo di impiego e pertanto essa sembra inquadarsi nella logica della condizione di chiusura finale...È assolutamente ovvio che, in alternativa, si sarebbe potuto imporre la condizione di chiusura iniziale, anche se, in tal caso, non sarebbe stato possibile mettere i risultati sotto forma compatta” (Caliri, 1998).

La Caliri, dunque, ammette entrambe le rappresentazioni. Nel tentativo, peraltro lodevole, di individuare la rappresentazione più adeguata, correttamente e con onestà intellettuale, utilizza le locuzioni “sembra inquadarsi”, “sembra ragionevole”. L’osservazione circa la possibilità di esprimere in forma “compatta” (chiusa o analitica, diremmo noi) la soluzione per l’importo della rata nel caso di rate costante non ha alcuna implicazione finanziaria.

Anche Varoli (1983), nel discutere dell’ammortamento in regime semplice, ammette entrambe le rappresentazioni, sia con chiusura finale (Equazione (19.1) di pagina 121) sia con chiusura iniziale (Equazione (19.2) di pagina 121) e sottolinea: “Come operazioni autonome gli ammortamenti non sono frequenti in regime di capitalizzazione semplice, perché normalmente gli ammortamenti hanno durata pluriennale e quindi rientrano nell’ambito del regime di capitalizzazione composta, tuttavia finanziariamente ogni conto corrente a saldo nullo è assimilabile a un ammortamento”. E del resto all’epoca non si prestava un’attenzione tale alla questione dell’ammortamento in regime semplice da giustificare uno studio approfondito sul tema, demandando al regime composto la responsabilità di regolare tutti i prestiti. Se si restringe l’applicabilità del regime semplice ad operazioni di prestito di durata inferiore all’anno, ambito tipico di applicazione di tale regime nella concezione classica della matematica finanziaria, i piani di ammortamento di un prestito in regime semplice con chiusura iniziale, con chiusura finale o nel regime composto non mostrano differenze significative (Mari e Aretusi, 2023). Il punto cruciale diventa l’estensione del regime semplice con chiusura finale al caso generale, estensione che, come è stato mostrato in questo lavoro presenta gravi incoerenze e inconsistenze. I riferimenti ad autorevoli studiosi di matematica finanziaria del passato a sostegno della condizione di chiusura finale appaiono, dunque, deboli e circoscritti, e certamente non significativi perché collocati temporalmente in epoche precedenti alla costruzione della moderna teoria della finanza della quale non potevano conoscerne i contenuti innovativi.

Lasciemo al lettore l’onere e l’onore di sviluppare ulteriori riflessioni e considerazioni, sperando di averne fornito più di uno spunto.

A. ANCORA SULLA CHIUSURA FINALE E L'ARBITRAGGIO

Si consideri al tempo $t = 0$ un prestito per l'importo S_0 con un piano di rimborso costituito da rate di importi non negativi,

$$\mathbf{r} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}, \quad (\text{A.1})$$

esigibili ai tempi $1, 2, \dots, m$, con $R_m > 0$. La Tabella 9 mostra l'importo degli interessi maturati nel primo periodo, cioè la prima quota interessi, al variare della scadenza del prestito m , importo calcolato ad interessi semplici con chiusura finale per $S_0 = 100$ e $i = 10\%$ secondo l'Equazione (45). Per evidenziare la dipendenza dalla scadenza, abbiamo indicato con $I_1^{(m)}$ la prima quota interessi.

Tabella 9: Gli interessi maturati nel primo periodo.

m	1	5	10	20	30
$I_1^{(m)}$	10.00	7.14	5.26	3.45	2.56

Decisamente singolare è il risultato: gli interessi che maturano sullo stesso capitale nello stesso intervallo di tempo $[0,1]$ assumono valori diversi a seconda della durata del prestito. Ciò comporta che se un agente economico acquistasse a 100 un'obbligazione con scadenza al tempo $k = 1$ finanziando l'acquisto indebitandosi accendendo un prestito con scadenza $m = 10$ per lo stesso importo $S_0 = 100$ e chiudesse il prestito al tempo $k = 1$, otterrebbe un profitto certo da arbitraggio pari alla differenza

$$I_1^{(1)} - I_1^{(10)} = 10.00 - 5.26 = 4.74, \quad (\text{A.2})$$

indipendentemente dalle caratteristiche del piano di rimborso del prestito. Infatti, il nostro agente economico riceverebbe $C = 110$ dall'obbligazione,

$$C = 100 + I_1^{(1)} = 110, \quad (\text{A.3})$$

e pagherebbe

$$R_1 + M_1 = S_0 + I_1^{(10)} = 105.26, \quad (\text{A.4})$$

per chiudere il prestito, indipendentemente da come è strutturato il piano di rimborso. Anche questo arbitraggio è una diretta conseguenza della dipendenza dalla scadenza della funzione di sconto nella rappresentazione ad interessi semplici con chiusura finale. Se avessimo utilizzato la rappresentazione con chiusura iniziale, entrambe le operazioni si sarebbero chiuse a 110, eliminando ogni possibilità di arbitraggio.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Annibali, A., Annibali, A., Barracchini, C.: Lo “stato dell’arte”, sia accademico che professionale, sulla presenza dell’anatocismo nell’ammortamento di mutui “alla francese” e relativa stesura del piano in capitalizzazione semplice. *Le Controversie Bancarie* 3, 82–104 (2017).
- Annibali, A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri, F.: Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. *Le Controversie Bancarie* 10, 59–81 (2018).
- Annibali, A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri, F.: Ammortamento di mutui “alla francese” in capitalizzazione composta e semplice: il problema delle quote interessi. *Le Controversie Bancarie* 69, 52–75 (2023).
- Annibali, A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri, F.: Il problema della fissazione dell’epoca di equivalenza nella valutazione delle operazioni finanziarie nel regime finanziario della capitalizzazione semplice. Considerazioni relative alla presenza di sospensioni di pagamento. *Le Controversie Bancarie* 86, 41–79 (2024).
- Bachelier, L.: *Théorie de la spéculation*. Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, Paris (1900).
- Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–654 (1973).
- Caliri, M.: *Appunti di Matematica Finanziaria*. Edizioni Giappichelli, 1998.
- Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F.: *Manuale di Finanza*. Il Mulino, Bologna, 2005.
- Cox, J.C., Ingersoll J.E., Ross, S.A.: An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica* 53, 363–384 (1985).
- Cox, J.C., Ingersoll J.E., Ross, S.A.: A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53, 385–407 (1985).
- De Felice, M., Moriconi, F.: *La Teoria dell’Immunizzazione Finanziaria. Modelli e Strategie*. Il Mulino, Bologna, 1991.
- De Finetti, B.: *L’incertezza nella Economia. Economia delle Assicurazioni*. UTET, Torino, 1967.
- Duffie, D. and Singleton, K. Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies* 1999, 12(4), 687–720.
- Dunbar, N.: *Anche i Nobel perdono. Idee, persone e fatti della finanza*. EGEA, Milano, 2003
- Fersini, P., Olivieri, G.; Sull’“anatocismo” nell’ammortamento francese. *Banche e Bancieri* 42(2), 134–171 (2015).
- Heath, D., Jarrow, R., Morton, A.: “Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica* 60, 77–105 (1992).
- Hull, J., White, A.: Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies* 3, 573–592 (1990).
- Hull, J., White, A.: One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, 235–254 (1993)

- Insolera, F.: Teorica della Capitalizzazione. Einaudi, Torino, 1949.
- Insolera, F.: Teorica dell'ammortamento. Einaudi, Torino, 1950
- Mari, C.: Amortizing loans under arbitrary discount functions. *Journal of Risk and Financial Management* (2024), <https://doi.org/10.3390/jrfm1010000>.
- Mari, C., Aretusi, G.: Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare. *Il Risparmio* 1, 27-45 (2018).
- Mari, C., Aretusi, G.: Sull'ammortamento dei prestiti in regime composto e in regime semplice: alcune considerazioni concettuali e metodologiche. *Il Risparmio* 1, 115-151 (2019).
- Mari, C., Aretusi, G.: La valutazione e l'ammortamento dei prestiti: una trattazione unitaria (anche nel regime semplice). *Il Risparmio* 2, 7-36 (2023).
- Mari, C. and Renò, R. Credit risk analysis of mortgage loans: An application to the Italian market. *European Journal of Operational Research* 2005, 163, 83-93.
- Merton, R.: Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183 (1973).
- Ottaviani, G.: *Lezioni di Matematica Finanziaria*. Veschi, Milano, 1988.
- Pressacco, F., Beccacece, F., Cacciafesta, F., Favero, G., Fersini, P., Li Calzi, M., Nardini, F., Peccati, L., Ziani, L.: Anatocismo nei piani di ammortamento standardizzati tradizionali. *Rapporto Scientifico dell'AMASES n. 2022/01* (2022).
- Silber, W.L.: The process of financial innovation. *American Economic Review* 73, (1983).
- Vasicek, O.: An equilibrium characterization of the term structure. *The Journal of Financial Economics* 5, 177-188 (1977)
- Varoli, G.: *Matematica Finanziaria*. Pàtron Editore, Bologna, 1983.

FORMULE PER IL CALCOLO DELL'ELEMENTO DI AIUTO NELLE GARANZIE A FAVORE DELLE PMI: IL CASO DELL'ITALIA

*FORMULAE FOR CALCULATING THE AID
ELEMENT IN GUARANTEES FOR SMES:
THE CASE OF ITALY*

Pierangelo Ciurlia, Maria Chiarolla e Alessia Quarta

Università del Salento
Dipartimento di Scienze dell'Economia

pierangelo.ciurlia@unisalento.it
maria.chiarolla@unisalento.it
alessia.quarta@live.com

Questo articolo fornisce le formule di calcolo dell'elemento di aiuto nelle garanzie statali su prestiti a favore delle PMI. Esaminando il caso dell'Italia e il Fondo di Garanzia per le PMI (Legge 662/1996), il principale sistema di garanzie pubbliche nazionale, lo scopo dell'articolo è quel-

lo di offrire un approccio analitico che, partendo da premesse generali, possa essere applicabile a tutte le tipologie di aiuto di Stato concesse in forma di garanzia alle PMI, sia individualmente sia nell'ambito di uno specifico regime.

Parole chiave: Regime di garanzia statale, equivalente sovvenzione lordo, tasso di premio unico, tassi di premio esente, tassi di riferimento e di attualizzazione.

This paper provides the formulae for calculating the aid element in State guarantees on loans to SMEs. Examining the case of Italy and the Guarantee Fund for SMEs (Law 662/1996), the main national system of public guarantees, the aim

of this paper is to offer an analytical approach that, starting from general premises, can be applicable to all types of State aid in the form of guarantees granted to SMEs, either individually or within a specific scheme.

Keywords: State guarantee scheme, gross grant equivalent, single premium rate, safe harbour premium rates, reference and discount rates.

1. INTRODUZIONE

Al fine di garantire la libera concorrenza e condizioni di parità tra imprese, l'Unione Europea (UE) ha adottato un rigoroso quadro normativo per disciplinare gli aiuti di Stato¹, per i quali l'art. 107, par. 1, del Trattato sul Funzionamento dell'Unione Europea (GUUE, 2016) - in sigla TFUE - sancisce, in generale, il principio di incompatibilità con il mercato interno. Tuttavia, non si tratta di un divieto totale in quanto sono previste categorie di aiuto che sono o possono considerarsi compatibili ai sensi dell'art. 107, parr. 2 e 3, del TFUE, ed è altresì permesso agli Stati membri di sostenere alcuni settori di attività o imprese tramite aiuti di minore importanza, in base al principio secondo cui, per la loro ridotta entità, non sono in grado di pregiudicare sensibilmente il libero commercio.

Com'è noto, gli aiuti di Stato possono assumere diverse forme, come quella di contributo a fondo perduto, esenzione o riduzione di imposte e tasse, garanzia su prestiti, cessione di beni a titolo gratuito o a condizioni favorevoli. In particolare, la garanzia statale sui prestiti rappresenta in Italia uno degli strumenti agevolativi più efficaci² per la crescita del tessuto imprenditoriale del paese, prevalentemente composto da micro, piccole e medie imprese (PMI). Come emerge dall'ultima *Relazione sugli interventi di sostegno alle attività economiche e produttive* (MIMIT, 2023), nell'anno 2022 gli interventi a garanzia, per un importo di oltre 58 miliardi di euro, hanno rappresentato il 64% del totale delle agevolazioni concesse a livello nazionale. In tale contesto, un ruolo fondamentale è svolto dal Fondo di Garanzia per le PMI - di seguito il "Fondo" - istituito con la Legge n. 662/1996 (GURI, 1996) e gestito dal Raggruppamento Temporaneo di Imprese, guidato da Mediocredito Centrale (MCC), per conto del Ministero delle Imprese e del Made in Italy (MIMIT). L'obiettivo del Fondo³ è favorire l'accesso al credito delle PMI nelle fasi in cui le stesse hanno difficoltà a finanziarsi mediante risorse proprie e, in tal modo, ha rappresentato lo strumento principale per la loro sopravvivenza in periodi di crisi⁴, come quelli recenti causati dalla pandemia da COVID-19 e dall'invasione

1 Per una rassegna dettagliata, e recentemente aggiornata, dell'argomento si veda il testo di Baldi (2024).

2 Si vedano, in proposito, le analisi condotte da Lagazio et al. (2021) e Gai et al. (2023) sui potenziali rischi e impatti negativi.

3 Sull'impiego nel Fondo di sistemi predittivi basati sul machine learning, si vedano de Blasio et al. (2018) e Andini et al. (2022).

4 Per un'analisi degli effetti del Fondo sulla redditività delle imprese garantite in periodi di crisi, si vedano, ad esempio, Caselli et al. (2019) e Cascarino et al. (2022).

russa dell'Ucraina. Grazie all'intervento della garanzia statale, il rischio di insolvenza⁵, solitamente in capo all'istituto di credito che concede il finanziamento, viene assunto dal Fondo e dunque, in ultima istanza, dallo Stato. Così facendo, l'impresa ottiene una garanzia a condizioni migliori di quelle conseguibili in genere sui mercati finanziari, e la differenza tra il prezzo di mercato della garanzia e il costo effettivamente pagato costituisce l'elemento di aiuto di cui essa beneficia.

Quando una garanzia non rispetta il principio dell'investitore operante in un'economia di mercato, essa si configura come un aiuto di Stato. L'elemento di aiuto deve pertanto essere quantificato, ovvero convertito in un importo che ne rappresenti il vantaggio effettivo, per verificare se è possibile ritenere la misura ammissibile a norma di un'esenzione specifica, come espressa nei regolamenti *de minimis* e di esenzione per categoria. La compatibilità dell'aiuto è difatti subordinata al rispetto di prefissati vincoli stabiliti nei vari regolamenti, necessari a evitare il cumulo dei benefici e il superamento del limite massimo di aiuto concedibile, stabilito in valore assoluto o in percentuale rispetto alle spese ammissibili. Al fine di garantire il rispetto degli obblighi di trasparenza e di pubblicità previsti dalla normativa, la Commissione Europea - di seguito la "Commissione" - ha inoltre predisposto per ciascun Stato membro l'istituzione di un registro nazionale degli aiuti di Stato finalizzato a raccogliere le informazioni e a permettere i necessari controlli per ogni misura di aiuto concessa.

In questo lavoro si fornisce la formulazione analitica del contenuto agevolativo degli aiuti di Stato concessi in forma di garanzia. Partendo da una trattazione generale, che considera le disposizioni semplificate previste dalla normativa europea e le principali tipologie di premi richiesti nel quadro di un regime di garanzia⁶, si derivano le formule per il calcolo dell'elemento di aiuto nelle garanzie a favore delle PMI, relativamente alla modalità di rimborso di un prestito utilizzata dalle autorità italiane. Il lavoro è organizzato come segue. Il paragrafo 2 riassume il contesto normativo di riferimento nonché le caratteristiche di una garanzia statale sui prestiti. Il paragrafo 3 descrive i due strumenti di semplificazione consentiti per la quantificazione del premio di mercato adeguato di una garanzia per le PMI. I paragrafi 4 e 5 presentano, rispettivamente, la metodologia generale e le formule di calcolo dell'elemento di aiuto nelle garanzie con piano di ammortamento francese del prestito sottostante. In relazione alla prassi operativa del Fondo, nel paragrafo 6 sono esaminate alcune applicazioni che mostrano i vantaggi dell'approccio analitico. Il paragrafo 7 illustra le considerazioni finali e l'Appendice riporta per completezza la dimostrazione dei risultati ottenuti.

5 Per una valutazione dell'impatto degli aiuti di Stato in forma di garanzia sulla riduzione del rischio di credito, si vedano, tra gli altri, Broccardo (2009), Arcuri et al. (2020) e Erzegovesi (2022).

6 Per una rassegna della letteratura scientifica su vari argomenti relativi ai regimi di garanzia, si veda Santeiro-Sánchez et al. (2024).

2. CONTESTO NORMATIVO

A livello normativo, i principali riferimenti sono la *Comunicazione della Commissione sull'applicazione degli articoli 87 e 88 del trattato CE⁷ agli aiuti di Stato concessi sotto forma di garanzie* (GUUE, 2008b), di seguito la “Comunicazione in materia di garanzie”, e la *Comunicazione della Commissione relativa alla revisione del metodo di fissazione dei tassi di riferimento e di attualizzazione* (GUUE, 2008a), di seguito la “Comunicazione sui tassi di riferimento”. La materia è nota agli operatori, ma vale qui la pena riassumere gli elementi caratterizzanti su cui si basa la trattazione successiva.

Comunicazione in materia di garanzie. Aggiornamento della prima comunicazione (GUUE, 2000) relativa agli aiuti di Stato concessi in forma di garanzia, ha lo scopo di esporre in modo dettagliato agli Stati membri i principi cui la Commissione si attiene per l'interpretazione e l'applicazione degli articoli 107 e 108 del TFUE alle garanzie statali, onde garantire la parità di trattamento e la massima trasparenza a tale misura. Con riferimento alla forma più comune di garanzia, quella connessa ad un'operazione finanziaria specifica quale un prestito, convenuto tra un mutuatario, il beneficiario principale della garanzia, e un mutuante, il cui rischio viene ridotto mediante la garanzia, si elencano le condizioni sufficienti per escludere la presenza di un aiuto di Stato nella concessione di garanzie, sia su base individuale (ad hoc) sia nell'ambito di uno specifico regime (GUUE, 2008b, punti 3.2 e 3.4). In particolare, per la concessione di garanzie alle PMI e onde facilitare il loro accesso al credito, in deroga alle condizioni sulla determinazione dei prezzi (premi) orientati al mercato di una garanzia, sono ammesse le seguenti misure di semplificazione (GUUE, 2008b, punti 3.3 e 3.5):

- l'utilizzo dei premi esenti, sia per le garanzie ad hoc che per i regimi di garanzia, considerati come un minimo e basati sul rating della singola PMI beneficiaria;
- l'utilizzo di un premio unico, solo per i regimi di garanzia, al fine di uniformare il trattamento economico di tutte le PMI beneficiarie di un regime, indipendentemente dal loro livello di rischio.

Come principio generale, si considera elemento di aiuto, ovvero l'Equivalento Sovvenzione Lordo (ESL), la differenza positiva tra il prezzo (teorico) di mercato di una garanzia e il prezzo (eventuale) effettivamente addebitato per tale misura. Se la garanzia dura più di un anno, l'elemento di aiuto è ottenuto sommando gli equivalenti sovvenzione annui che devono essere attualizzati all'epoca di concessione della garanzia utilizzando il vigente tasso di riferimento (GUUE, 2008b, punto 4.1). Prima di procedere alla derivazione delle formule per il calcolo dell'ESL, si richiamano le caratteristiche di una garanzia statale sui prestiti e la notazione di base.

Si indicano con D e T rispettivamente l'importo (in euro) e la scadenza o durata (in anni) del finanziamento o prestito assistito dalla garanzia. In linea di principio, la durata della garanzia è limitata alla durata dell'operazione finanziaria sottesa. Tuttavia, le autorità italiane prevedono che la durata massima della garanzia non possa superare

7 A partire dal 1° dicembre 2009 gli articoli 87 e 88 del Trattato CE sono diventati gli articoli 107 e 108, rispettivamente, del TFUE. Le due serie di disposizioni sono identiche nella sostanza.

il limite di 30 anni. Detto $G > 0$ l'importo della garanzia, esso è definito come frazione $g \in (0, 1)$ del valore del finanziamento sottostante, per cui è

$$g = G/D \tag{1}$$

con la misura di copertura g che in genere è espressa in forma percentuale. In base alle prescrizioni normative, è stabilito un limite massimo sulla garanzia sia in termine di valore, importo garantito G , sia in termini relativi rispetto al finanziamento, percentuale di copertura g . Formalmente, indicata con S^G la somma dei valori delle garanzie sui finanziamenti già ammessi a un regime di garanzia, per ogni nuovo finanziamento per il quale si chiede l'ammissione a tale regime, deve essere

$$\begin{cases} G_{min} \leq S^G + G \leq G_{max} \\ 0 < g \leq g_{max} < 1 \end{cases} \tag{2}$$

con $0 \leq G_{min} < G_{max}$ e dove la percentuale massima di copertura g_{max} è differenziata in base a diverse caratteristiche⁸. Ai fini del calcolo dell'elemento di aiuto nelle garanzie, la scadenza T del finanziamento e della relativa garanzia viene conteggiata in un numero intero di anni, arrotondando per eccesso all'intero più prossimo, pertanto si ha $T \approx N \in \mathbb{N}^+$. Inoltre, per le garanzie di durata superiore a un anno ($N > 1$) e indipendentemente dalla presenza o meno di un piano di rate prestabilito, le autorità italiane richiedono di valutare il rimborso del prestito in modo convenzionale ipotizzando la tipologia del piano di ammortamento a rate costanti (o francese), con periodicità annuale e tasso tecnico pari al vigente tasso di riferimento comunitario.

La Comunicazione sui tassi di riferimento. In materia di aiuti di Stato concessi in forma di garanzie, la Commissione si avvale dei tassi di riferimento e di attualizzazione (GUUE, 2008a) per la fissazione del tasso di interesse su operazioni di rimborso di un prestito e per il calcolo del valore attuale netto di un flusso di importi futuri. Indicato con i_b il tasso di base (*base rate*), fissato dalla Commissione e aggiornato periodicamente in relazione all'andamento dei tassi del mercato monetario, il tasso di riferimento (*reference rate*) i_r è ottenuto sommando a i_b un margine (*margin* o *spread*) θ_r espresso in punti base (pb) e stabilito in funzione del merito di credito (*rating*) e delle garanzie offerte, secondo quanto indicato nella Tabella 1. Solitamente al tasso i_b viene applicata una maggiorazione di 100 pb che presuppone prestiti con: a) rating soddisfacente e garanzie elevate; oppure b) prestiti con rating buono e garanzie normali. In linea di principio, il tasso di attualizzazione (*discount rate*) i_d è il tasso di base maggiorato di un margine fisso $\bar{\theta} = 100$ pb ed è adottato come tasso annuo d'interesse in regime (di capitalizzazione) esponenziale.

⁸ Per i valori di g_{max} fissati attualmente dal Fondo per la concessione di garanzie, si veda il Decreto Legge Anticipi n. 145/2023, convertito con modificazioni dalla Legge n. 191/2023 (GURI, 2023).

Tabella 1: Margini (in pb) relativi ai prestiti, distinti per merito di credito e garanzie offerte dal debitore

Merito di credito (Rating)	Costituzione di garanzie		
	Elevata	Normale	Bassa
Ottimo (AAA-A)	60	75	100
Buono (BBB)	75	100	220
Soddisfacente (BB)	100	220	400
Scarso (B)	220	400	650
Negativo/Difficoltà finanziarie (CCC e inferiore)	400	650	1000

Fonte: GUUE, 2008a

3. DEFINIZIONE DEL PREMIO DI MERCATO DI UNA GARANZIA A FAVORE DI PMI

Com'è noto, il beneficio (ESL) per gli aiuti sotto forma di garanzia sui prestiti è l'importo aggregato dei differenziali annui fra prezzo di mercato e corrispettivo versato, attualizzati alla data di concessione della garanzia secondo la legge esponenziale. Per ogni periodo (anno) $n = 1, \dots, N$, siano $P^M(n) > 0$ il premio di mercato (market premium) e $P^A(n) \geq 0$ il premio effettivamente pagato (premium actually paid) in via anticipata a fronte della concessione della garanzia. Si ricorda che entrambi i premi sono conteggiati, secondo le rispettive aliquote (tassi annui), in percentuale g sul valore $D_{n-1} \geq 0$ del debito residuo all'inizio dello stesso periodo (anno) n -esimo. Indicato con $i > -1$ il tasso composto (annuo) a cui è remunerato il prestito e con k il numero di pagamenti rateali in un anno (periodicità o frequenza) del relativo piano di ammortamento, risulta che, qualunque sia la modalità di rimborso prescelta, devono essere soddisfatte, tra le altre, le seguenti condizioni: iniziale $D_0 = D$ e finale $D_N = 0$. Inoltre, nel caso dell'ammortamento francese, si verifica che il debito residuo dipende dai valori di $N = T \cdot k$, numero di rate, e di $i^{(k)}$, tasso periodale equivalente ad i . La quantificazione dell'ESL per le garanzie concesse alle PMI nel quadro di uno specifico regime, come il Fondo, dipende dalla tipologia e durata del finanziamento sottostante e dalla natura delle commissioni dovute dal beneficiario. Di seguito, si illustrano brevemente, e alla luce delle più recenti disposizioni normative nazionali, i due metodi di determinazione di $P^M(n)$ previsti dalla Comunicazione in materia di garanzie ed elencati in precedenza.

Metodo nazionale. È il metodo per calcolare l'elemento di aiuto nei regimi di garanzia per le PMI (N. 182/2010), notificato dall'allora Ministero dello Sviluppo Economico e approvato dalla Commissione con Decisione n. 4505 del 6 luglio 2010 (GUUE, 2010). Esso prevede l'adozione di un premio unico come stabilito dalla Comunicazione in materia di garanzie che ammette, in considerazione della più limitata distorsione della concor-

renza che può essere causata da garanzie concesse alle PMI nel quadro di un regime e i cui importi non superino complessivamente la soglia di 2,5 milioni di euro per impresa, l'utilizzo di un unico fattore di rischio senza effettuare alcuna valutazione sul merito creditizio (GUUE, 2008b, punto 4.5). Pertanto, in base alla (2) e per ogni singola impresa nell'ambito del regime di garanzia, deve essere

$$G_{min} \leq S^G + G \leq G_{max} \tag{3}$$

con $G_{min} = 0\text{€}$ e $G_{max} = 2.500.000\text{€}$. Secondo il metodo nazionale, la determinazione di $P^M(n)$ deve essere tale da coprire i rischi normali inerenti alla garanzia nonché le spese amministrative e il costo del capitale. Pertanto, indicando con $\bar{\pi}$ il tasso (annuo) di premio unico, si ha

$$P^M(n) = D_{n-1} \cdot g \cdot \bar{\pi}, \quad n = 1, \dots, N \tag{4}$$

dove

$$\bar{\pi} = f_R + c_A + c_K \tag{5}$$

con f_R la probabilità di perdite al netto dei recuperi, ovvero il fattore di rischio del regime, da differenziare tra finanziamenti per investimenti e per capitale circolante, c_A il tasso dei costi amministrativi e c_K il tasso di remunerazione del capitale investito nel regime. La misurazione di $\bar{\pi}$ secondo la (5) è un elemento cruciale e si basa su dati aggiornati e resi disponibili dal MIMIT con cadenza annuale, per tenere conto, in particolare, dell'evoluzione nel tempo del fattore di rischio. Gli attuali valori di f_R , c_A , c_K e del tasso $\bar{\pi}$, in vigore dal 24 gennaio 2024, sono riportati nella Tabella 2.

Tabella 2: Valori delle componenti e del tasso di premio unico, in vigore dal 24 gennaio 2024

Garanzie a copertura di finanziamenti per:	Fattore di rischio f_R	Tasso dei costi amministrativi c_A	Tasso di remunerazione c_K	Tasso di premio unico $\bar{\pi}$
Investimenti	0,98%	0,60%	0,32%	1,90%
Capitale circolante	1,25%	0,60%	0,32%	2,17%

Fonte: Elaborazione degli autori su dati del MIMIT

Metodo dei premi esenti. In applicazione del Decreto Legge Anticipi (GURI, 2023) e con validità per il corrente anno, dal 29 febbraio 2024 è divenuta operativa, per PMI e professionisti, l'estensione dell'importo massimo garantito a 5 milioni di euro con conseguente utilizzo dei premi esenti (*safe harbour premiums*), come disposto dalla Comunicazione in materia di garanzie e in attesa del varo del nuovo metodo da parte della Commissione per il maggior importo previsto dalla normativa nazionale⁹. Pertanto, in base alla (2) e per ogni singola impresa nell'ambito del regime di garanzia, deve essere

⁹ Come detto in precedenza, il sistema di quantificazione dell'ESL, per espressa previsione della Commissione, infatti, può essere utilizzato soltanto per le PMI e per importi garantiti fino a 2,5 milioni di euro. Si ricorda, tuttavia, che fino al 31 dicembre 2023, per effetto delle misure temporanee introdotte dal Decreto Legge Cura Italia n. 18/2020, convertito con modificazioni dalla Legge n. 27/2020 (GURI, 2020a), e il successivo Decreto Legge Liquidità n. 23/2020, convertito con modificazioni dalla Legge n. 40/2020 (GURI, 2020b), l'importo massimo garantito era stato innalzato fino a 5 milioni di euro.

$$G_{min} < S^G + G \leq G_{max} \quad (6)$$

con $G_{min} = 2.500.000\text{€}$ e $G_{max} = 5.000.000\text{€}$. Il metodo dei premi esenti prevede l'applicazione di un premio differenziato in base al merito creditizio del beneficiario, determinato secondo il modello di valutazione del Fondo. Nello specifico, il tasso (annuo) di premio esente, indicato da π_j^{sh} con $j = 1, \dots, 12$ le classi di rating, varia nell'intervallo $[0,8\%, 6,3\%]$ come illustrato nella Tabella 3. Qualora non sia possibile la determinazione della classe di rating, il tasso di premio esente è fissato all'aliquota del 3,8%, oppure nella misura applicabile all'impresa controllante, se esistente, sulla base della Tabella 3. Il premio di mercato è dunque calcolato come nella (4) con $\bar{\pi}$ sostituito dal tasso π_j^{sh} per la j -esima classe di rating assegnata al beneficiario, ossia

$$P^M(n) = D_{n-1} \cdot g \cdot \pi_j^{sh}, \quad n = 1, \dots, N \quad (7)$$

Tabella 3: Attuali valori dei tassi di premio esente in base alla classe di rating

Tasso di premio esente π_j^{sh}	Classe di rating (indice j)	Probabilità di insolvenza	Fascia di valutazione	Rischio di credito
0,8%	1	0,12%	1	Basso
2,0%	2	0,33%	2	Contenuto
	3	0,67%		
	4	1,02%		
3,8%	5	1,61%	3	Accettabile
4,3%	6	2,87%		
4,8%	7	3,62%		
5,3%	8	5,18%	4	Significativo
5,8%	9	8,45%		
6,3%	10	9,43%		
NA	11	16,30%	5	Elevato
	12	22,98%		

Fonte: Elaborazione degli autori su dati di MCC

4. METODOLOGIA GENERALE PER IL CALCOLO DELL'ESL

Si indica¹⁰ con $\{Z_N \geq 0, N \in \mathbb{N}^+\}$ l'insieme dei valori dell'elemento di aiuto (ESL) al variare della durata N della garanzia e del metodo, nazionale o dei premi esenti, utilizzato per il calcolo. Al fine di utilizzare un'unica espressione per Z_N , si definisce la grandezza

10 Per chiarezza espositiva si riporta in dettaglio l'impostazione proposta da Ciurlia e Quarta (2024).

$$\pi = \begin{cases} \bar{\pi}, & \text{premio unico} \\ \pi_j^{sh} \quad (j = 1, \dots, J), & \text{premi esenti} \end{cases} \quad (8)$$

che descrive l'aliquota da applicare sull'importo garantito per determinare il valore di $P^M(n)$ nei modi consentiti dalla Comunicazione in materia di garanzie. Per il premio unico, l'aliquota fissa $\bar{\pi}$ assume i valori indicati nella Tabella 2, mentre per i premi esenti, le aliquote differenziate π_j^{sh} (per $J = 12$ classi di rating) sono riportate nella Tabella 3. Per descrivere le diverse tipologie di premi pagati al Fondo si usa la notazione $\{(p_{n-1}, n), n = 1, \dots, N\}$, ovvero l'insieme delle coppie aliquota p_{n-1} e periodo (anno) n di riferimento nell'arco di durata della garanzia. Applicando $p_{n-1} \geq 0$ sul valore residuo della garanzia all'inizio del periodo n -esimo si ricava l'entità della commissione $P^A(n)$ da versare in via anticipata al Fondo. Nel caso tipico di commissione una tantum, si ha

$$p_0 > 0 \quad \wedge \quad p_{n-1} = 0, \quad \forall n > 1 \quad (9)$$

essendo richiesto solo il versamento di un corrispettivo iniziale. Diversamente, nel caso di commissioni annuali, si ha $p_{n-1} > 0$ per ogni $n \geq 1$, e se, in particolare, restano costanti in base a un'aliquota fissa $\bar{p} > 0$ per tutta la durata della garanzia, allora risulta

$$p_{n-1} = \bar{p}, \quad \forall n \geq 1 \quad (10)$$

Relativamente alle commissioni annuali, è necessario anche considerare lo schema dell'aliquota costante a tratti, previsto nelle Disposizioni Operative del Fondo (Parte IV) per le operazioni finanziarie aventi ad oggetto investimenti nel capitale di rischio. In generale, considerata una qualunque partizione dell'insieme $\{1, \dots, N_{max}\}$, con $N_{max} \in \mathbb{N}^+$ durata massima della garanzia, in $B \in \mathbb{N}^+$ blocchi ($B \leq N_{max}$) mediante la seguente suddivisione $1 \leq N_1 < \dots < N_b < \dots < N_B = N_{max}$, si ha

$$p_{n-1} = \begin{cases} \bar{p}_1, & n = 1, \dots, N_1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{p}_b, & n = N_{b-1} + 1, \dots, N_b \\ \vdots & \vdots \\ \bar{p}_B, & n = N_{B-1} + 1, \dots, N_B \end{cases} \quad (11)$$

dove $\bar{p}_b \geq 0, b = 1, \dots, B$, è l'aliquota fissa per il b -esimo blocco. Nello specifico del Fondo, si suddivide l'insieme $\{1, \dots, 30\}$ in tre blocchi ($B = 3$), scegliendo per il primo blocco solo l'anno di ammissione ($N_1 = 1$), per il secondo blocco gli anni successivi fino al 5° ($N_2 = 5$) e, infine, l'ultimo blocco comprende gli anni dal 6° in poi fino al massimo di 30 anni ($N_3 = N_{max} = 30$). Segue dunque che la (11) diventa

$$p_{n-1} = \begin{cases} \bar{p}_1, & n = 1 \\ \bar{p}_2, & n = 2, \dots, 5 \\ \bar{p}_3, & n = 6, \dots, 30 \end{cases} \quad (12)$$

Gli attuali valori dell'aliquota iniziale p_0 , per la commissione una tantum, e delle aliquote fisse per blocchi \bar{p}_b ($b = 1, 2, 3$), per le commissioni annuali, sono riportati nella Tabella 4.

Com'è noto, la variabile Z_N è data dalla somma degli equivalenti sovvenzione annui, scontati al momento di concessione della garanzia, ovvero al tempo $t = 0$, utilizzando la funzione valore della legge esponenziale con tasso composto pari al vigente tasso di attualizzazione comunitario, ossia $i = i_d$. Formalmente, si ha

$$Z_N = \sum_{n=1}^N V(0; \Delta P_{n-1}) = \sum_{n=1}^N \Delta P_{n-1} (1 + i_d)^{-n+1} \quad (13)$$

dove, in base a (4) e (7), la grandezza ΔP_{n-1} espressa da

$$\Delta P_{n-1} = P^M(n) - P^A(n) = D_{n-1} \cdot g(\pi - p_{n-1}) \quad (14)$$

è il differenziale tra premio di mercato $P^M(n)$ e premio effettivo $P^A(n)$ pagato in via anticipata al Fondo per il periodo n -esimo ($n = 1, \dots, N$): entrambi i premi sono conteggiati, seconde le rispettive aliquote, in percentuale g sul valore residuo del debito all'inizio dello stesso periodo n -esimo. Nel caso delle commissioni annuali con aliquota fissa per blocchi, la sommatoria in (13) si scompone al più in un numero B di sommatorie, una per ogni determinato blocco (insieme di anni) in cui si suddivide la durata della garanzia. Infine, si verifica che, nel caso di durata annuale ($N = 1$), la variabile Z_1 si ottiene come limite di (13) e (14), ossia

$$Z_1 = \lim_{N \rightarrow 1^+} Z_N = G(\pi - p_0) \quad (15)$$

Tabella 4: Attuali valori delle aliquote per la determinazione delle commissioni su garanzie concesse dal Fondo

Tipologia di operazione finanziaria	Modalità di pagamento della commissione	Periodo di esigibilità (Anno)	Restanti territori			¹ Regioni del Mezzogiorno		
			Micro impresa	Piccola impresa	Media impresa	Micro impresa	Piccola impresa	Media impresa
Operazioni sul capitale di rischio	Annuale (\bar{p}_b , $b = 1, 2, 3$)	² Anno di ammissione	1%			1%		
		³ Anni successivi: - Fino al 5° - Successivo al 5°	0,25%			0,25%		
Operazioni di sottoscrizione di Minibond con o senza piano di ammortamento	Una tantum (p_0)	² Anno di ammissione	1%			1%		
Altre operazioni finanziarie	Una tantum (p_0)	² Anno di ammissione	-	0,5%	1,0%	-	-	-

¹ Per "Regioni del Mezzogiorno" si intendono le seguenti 8 regioni: Abruzzo, Molise, Basilicata, Campania, Calabria, Puglia, Sardegna e Sicilia.

² Entro 3 mesi dalla data di delibera di ammissione del Consiglio di gestione deve essere versata al Fondo una commissione una tantum.

³ Oltre alla commissione una tantum, versata a seguito della concessione della garanzia, deve essere versata altresì al Fondo, a pena di decadenza della garanzia, entro il 31 gennaio di ciascun anno, una commissione annuale, per ciascun degli anni di detenzione della partecipazione.

Fonte: Elaborazione degli autori su dati di MCC

5. FORMULE ANALITICHE CON PIANO DI AMMORTAMENTO FRANCESE

Come detto in precedenza, per le garanzie di durata superiore a un anno ($N > 1$), la normativa italiana richiede di valutare il rimborso del prestito in modo convenzionale utilizzando: a) la tipologia del piano di ammortamento (PA) francese - il cui prospetto generale è riportato nella Tabella 5 - con cadenza annuale, ossia $k = 1$; b) il vigente tasso di riferimento comunitario come tasso tecnico, ossia $i = i_r$. È noto che nel PA francese, il più utilizzato dal sistema bancario italiano, l'importo costante R della rata, pagata con periodicità k in via posticipata, si ottiene dalla condizione di equità iniziale che stabilisce l'equivalenza finanziaria al tempo $t = 0$ tra l'importo D , capitale in prestito, e la rendita $\mathbf{R}/\mathbf{t} = \{R, \dots, R\}/\{t_1, \dots, t_N\}$ con la quale lo stesso è rimborsato gradualmente. In generale, si ha

$$R = D/a_{\overline{N}|i^{(k)}} \tag{16}$$

con $i^{(k)} = i/k$ il tasso periodale equivalente al tasso annuo i , secondo la prassi bancaria. Si ricorda che il simbolo $a_{\overline{N}|i^{(k)}}$ - si legge "α figurato N al tasso $i^{(k)}$ " - indica il valore attuale della rendita unitaria $\mathbf{1}/\mathbf{t} = \{1, \dots, 1\}/\{t_1, \dots, t_N\}$ ed è espresso da

$$a_{\overline{N}|i^{(k)}} = \begin{cases} \frac{v(1 - v^N)}{(1 - v)^i}, & i^{(k)} \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ N, & i^{(k)} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

dove $v = (1 + i^{(k)})^{-1}$ è il fattore di sconto periodale della legge esponenziale in funzione del tasso $i^{(k)} > -1$. In particolare, se $i^{(k)} = 0$ allora i valori attuali delle rate di $\mathbf{1}/\mathbf{t}$, in generale i termini della progressione geometrica $(v^n)_{n \geq 1}$, sono tutti uguali a 1. Ponendo $k = 1$ e $i = i_r$ nelle espressioni del debito residuo D_n , nella Tabella 5, e dell'importo R della rata, nella (16), la variabile Z_N in base a (13) e (14), e dopo semplici passaggi algebrici, diventa

$$Z_N = G \sum_{n=1}^N \frac{a_{\overline{N-n+1}|i_r}}{a_{\overline{N}|i_r}} (\pi - p_{n-1}) (1 + i_d)^{-n+1} \tag{18}$$

Tabella 5: Prospetto generale del piano di ammortamento (PA) francese di un prestito di importo D

¹ Indice (Periodo) n	² Scadenza (anni) t_n	³ Rata R_n	⁴ Quota interesse I_n	⁵ Quota capitale C_n	⁶ Debito residuo D_n	⁷ Debito estinto E_n
0	t_0	0	0	0	D	0
1	t_1	R	$R(1 - v^N)$	Rv^N	$R\alpha_{\overline{N-1} (b)}$	$R(\alpha_{\overline{N} (b)} - \alpha_{\overline{N-1} (b)})$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	t_n	R	$R(1 - v^{N-n+1})$	Rv^{N-n+1}	$R\alpha_{\overline{N-n} (b)}$	$R(\alpha_{\overline{N} (b)} - \alpha_{\overline{N-n} (b)})$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
N	t_N	R	$R(1 - v)$	Rv	0	D

- ¹ Indica il progressivo numerico del periodo, anno (se $k = 1$) o diverso dall'anno (se $k \neq 1$), che indica l'ordine di sequenza temporale.
- ² Corrisponde al tempo, espresso in anni, in cui viene effettuato il pagamento rateale ($t_n = n \cdot \tau$, con $\tau = 1/k$ il periodo costante e $n = 0, 1, \dots, N$).
- ³ Rappresenta l'importo che il mutuatario deve corrispondere al mutuante alla rispettiva scadenza.
- ⁴ Rappresenta la quota parte della rata che serve a remunerare, alla relativa scadenza, il valore residuo del capitale in prestito.
- ⁵ Rappresenta la parte residua della rata con cui viene rimborsato, alla relativa scadenza, una porzione del capitale in prestito.
- ⁶ Rappresenta la parte di debito, in termini di quote capitale, ancora da rimborsare alla rispettiva scadenza.
- ⁷ Rappresenta la parte di debito, in termini di quote capitale, già rimborsata alla rispettiva scadenza.

Si considera ora l'ipotesi, che ricorre nella fattispecie in esame, di un valore comune i_* per il tasso di riferimento e di attualizzazione. Pertanto, relativamente al PA francese e alle modalità di pagamento delle commissioni previste dalle vigenti Disposizioni Operative del Fondo (Parte IV), per la condizione $i_r = i_d = i_*$ valgono le seguenti proposizioni, le cui dimostrazioni sono riportate in Appendice:

Proposizione 1. Sia $D > 0$ l'importo del finanziamento di durata $T \doteq N \geq 1$, assistito dalla garanzia del Fondo con percentuale di copertura $g \in (0, g_{max}]$ e di valore G tale che $G_{min} \leq S^G + G \leq G_{max}$. Se è richiesto il pagamento di una commissione una tantum in base all'aliquota iniziale p_0 , allora l'elemento di aiuto della garanzia al vigente tasso comunicatorio $i_* > -1$ è dato da

$$Z_N = G(\pi X_{1,N} - p_0) \tag{19}$$

con

$$X_{1,N} = \begin{cases} \frac{1 + i_*}{i_*} - \frac{N}{(1 + i_*)^N - 1}, & i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ \frac{N + 1}{2}, & i_* = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Proposizione 2. Sia $D > 0$ l'importo del finanziamento di durata $T \cong N \geq 1$, assistito dalla garanzia del Fondo con percentuale di copertura $g \in (0, g_{\max}]$ e di valore G tale che $G_{\min} \leq S^G + G \leq G_{\max}$. Se è richiesto il pagamento di commissioni annuali in base alle aliquote fisse \bar{p}_1, \bar{p}_2 e \bar{p}_3 rispettivamente per l'anno di ammissione, gli anni dal 2° al 5° e gli anni dal 6° al 30°, allora l'elemento di aiuto della garanzia al vigente tasso comunitario $i_* > -1$ è dato da

$$Z_N = \begin{cases} G(\pi - \bar{p}_1), & \text{se } N = 1 \\ G[(\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2)X_{2,N}], & \text{se } N \in \{2, \dots, 5\} \\ G[(\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2)X'_{2,N} + (\pi - \bar{p}_3)X_{3,N}], & \text{se } N \in \{6, \dots, 30\} \end{cases} \quad (21)$$

con

$$X_{2,N} = \begin{cases} \frac{(1+i_*)^N - (1+i_*)}{i_*[(1+i_*)^N - 1]} - \frac{N-1}{(1+i_*)^N - 1}, & i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ \frac{N-1}{2}, & i_* = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$X'_{2,N} = \begin{cases} \frac{(1+i_*)^N - (1+i_*)^{N-4}}{i_*[(1+i_*)^N - 1]} - \frac{4}{(1+i_*)^N - 1}, & i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ 4 - \frac{10}{N}, & i_* = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$X_{3,N} = \begin{cases} \frac{(1+i_*)^{N-4} - (1+i_*)}{i_*[(1+i_*)^N - 1]} - \frac{N-5}{(1+i_*)^N - 1}, & i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ \frac{N-9}{2} + \frac{10}{N}, & i_* = 0 \end{cases} \quad (24)$$

In particolare, per la Proposizione 1, si può verificare che la (20) è la duration di Macaulay di una rendita $\mathbf{R}/\mathbf{t} = \{R, \dots, R\}/\{1, \dots, N\}$ annuale, immediata posticipata e a rate costanti. Dato che, per definizione, la duration di una generica rendita dipende dal tasso utilizzato per la valutazione e dal numero di rate, è corretto scrivere $Z_N = Z(i_*, N)$. Infine, si calcola subito

$$Z_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} Z_N = G \left(\pi \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} X_{1,N} - p_0 \right) = \begin{cases} G \left(\pi \frac{1+i_*}{i_*} - p_0 \right), & i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ \infty, & i_* = 0 \end{cases} \quad (25)$$

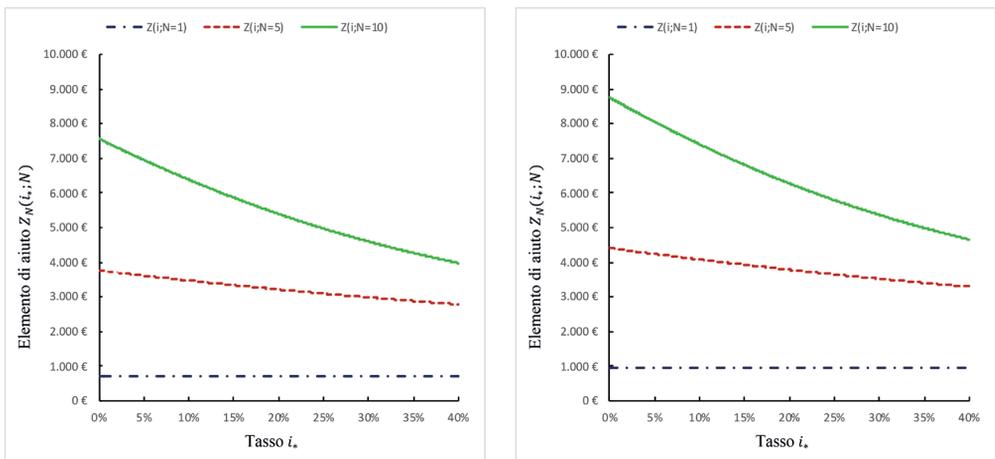
e dunque risulta che l'elemento di aiuto ha un limite finito se $i_* \neq 0$. Si osserva che la quantità Z_∞ altro non è che l'ESL per garanzie sui prestiti di durata infinita.

6. APPLICAZIONE

In relazione alla prassi operativa del Fondo, si esaminano alcune applicazioni. Nella prima parte si vede come varia l'elemento di aiuto in funzione del tasso comunitario e della durata della garanzia. Nella seconda parte si analizza il tasso di aiuto di Stato, ovvero il valore percentuale da applicare all'importo garantito per misurare direttamente l'elemento di aiuto.

Proprietà funzionali dell'elemento di aiuto. Posto per semplicità $S^G = 0$, si considera, a titolo di esempio, un finanziamento di importo $D = 100.000\text{€}$ assistito da una garanzia del Fondo con percentuale di copertura dell'80%, e dunque di valore $G = 80.000\text{€}$, per il quale è richiesto il pagamento della commissione una tantum in base all'aliquota iniziale $p_0 = 1\%$. Utilizzando le formule (19)-(20) con $\pi = \bar{\pi}$, è possibile studiare e tracciare il grafico di Z_N al variare del tasso $i_x \in (0, \infty)$ e della durata $N \in \mathbb{N}^+$. Nella Figura 1 è illustrato il comportamento di $Z_N(i_x; N)$ in funzione di i_x , fissata la durata N a 1, 5 e 10 anni, per operazioni finanziarie a fronte di investimenti (a sinistra) e per esigenze di capitale circolante (a destra). È evidente che l'elemento di aiuto è maggiore per la durata più lunga ($N = 10$), rispetto alle durate più brevi ($N = 1$ e $N = 5$), e per il valore più elevato del tasso $\bar{\pi}$, ossia, a parità di altre condizioni, è maggiore per finanziamenti del capitale circolante. In generale, per ogni $N > 1$, risulta che $Z_N(i_x; N)$ è funzione decrescente e convessa del tasso $i_x > 0$. Diversamente, $Z_N(i_x; N)$ è una funzione costante quando la garanzia è di durata annuale ($N = 1$): in questo caso, infatti, l'elemento di aiuto è indipendente dal tasso i_x non essendo richiesta ai fini del suo calcolo alcuna attualizzazione per la differenza tra premi, come risulta dalla (15).

Figura 1: Comportamento dell'elemento di aiuto $Z_N(i_x; N)$ in funzione del tasso i_x , fissata la durata N



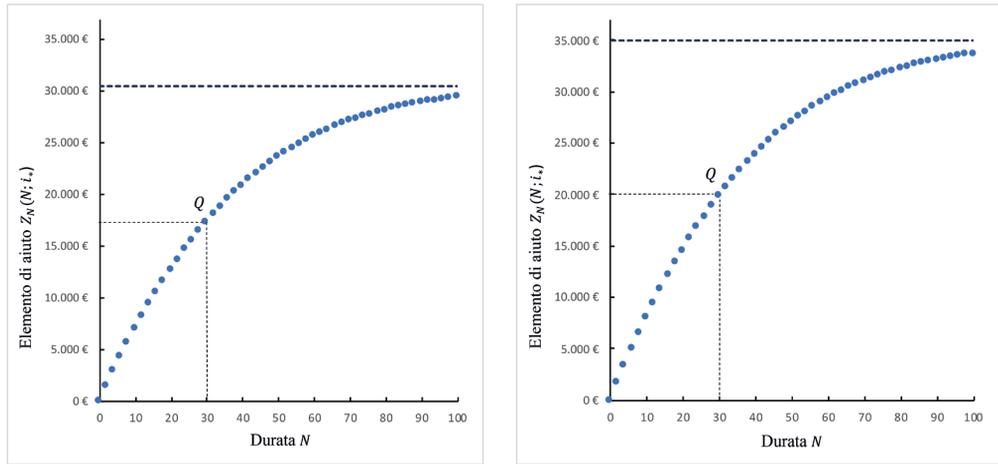
(a) **Investimenti** (Tasso di premio unico $\bar{\pi} = 1,90\%$)

(b) **Capitale circolante** (Tasso di premio unico $\bar{\pi} = 2,17\%$)

La Figura 2 mostra invece come varia l'elemento di aiuto $Z_N(N; i_x)$ in dipendenza di N , fissato il tasso i_x al livello vigente 5,11%, per operazioni finanziarie a fronte di investimenti (a sinistra) e per esigenze di capitale circolante (a destra). Si vede che

$Z_N(N; i_*)$ è funzione crescente e concava di N e ha come asintoto orizzontale destro la retta espressa dalla (25) che, per l'esempio considerato, risulta pari rispettivamente a 30.465,60€ e 34.908,60€ per operazioni finanziarie per investimenti (a sinistra) e per esigenze di capitale circolante (a destra). Infine, il punto Q indica, per la durata massima della garanzia concessa dal Fondo ($N_{max} = 30$), il più alto valore dell'elemento di aiuto ($Z_{N_{max}}$), pari a 17.285,87€ per finalità di investimento e a 19.855,96€ per fabbisogni di capitale circolante.

Figura 2: Comportamento dell'elemento di aiuto $Z_N(N; i_*)$ in funzione della durata N , fissato il tasso i_*



(a) **Investimenti** (Tasso di premio unico $\bar{\pi} = 1,90\%$)

(b) **Capitale circolante** (Tasso di premio unico $\bar{\pi} = 2,17\%$)

Tasso di aiuto di Stato. Il Fondo prevede che, per la tipologia “Altre operazioni finanziarie”, siano elaborati e resi disponibili i cosiddetti Quadri riassuntivi dell’efficacia contributiva¹¹ - di seguito i “Quadri” - utili ai fini del calcolo dell’ESL nelle garanzie concesse ai sensi dei regolamenti *de minimis* e di esenzione per categoria. Si tratta di due tabelle, la prima riferita a operazioni sul capitale circolante, la seconda relativa a operazioni per investimenti, con i valori espressi in termini percentuali. Formalmente, nei Quadri si definisce il tasso di aiuto di Stato (*State aid rate*) come il rapporto tra l’elemento di aiuto e l’importo garantito, ossia Z_N/G , fissata l’aliquota della commissione applicata dal Fondo e la durata del finanziamento sottostante. Nello specifico, per la tipologia “Altre operazioni finanziarie” con commissione una tantum, in base alla (19), si ha

$$Z_N/G = \pi X_{1,N} - p_0$$

dove la grandezza $X_{1,N}$ è espressa dalla (20). Pertanto, al variare dell’aliquota p_0 e della durata N , si ricavano facilmente i valori di Z_N/G per le operazioni finalizzate alla copertura di prestiti, sia per esigenze di capitale circolante ($\bar{\pi} = 2,17\%$) sia a fronte di investimenti ($\bar{\pi} = 1,90\%$). Si può verificare che, per le operazioni sul capitale circolante, il rapporto Z_N/G risulta negativo e pari a $-0,8300\%$ per $N = 1$ (durata annuale) e $p_0 = 3\%$ (aliquota

¹¹ I Quadri riassuntivi dell’efficacia contributiva, contenuti nelle Disposizioni Operative del Fondo (Parte X) e consultabili al link <https://www.fondidigaranzia.it/normativa-e-modulistica/modalita-operative>, sono aggiornati dal Gestore del Fondo in funzione delle variazioni dei valori dei parametri.

non più in vigore dal 2019). Tuttavia, il valore nei Quadri è posto uguale a zero in quanto per definizione è $Z_N \geq 0$.

Infine, per completezza espositiva, si considera la tipologia "Operazioni sul capitale di rischio" con commissioni annuali per la quale, in base alla (21), si ha

$$Z_N/G = \begin{cases} (\pi - \bar{p}_1), & \text{se } N = 1 \\ (\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2)X_{2,N}, & \text{se } N \in \{2, \dots, 5\} \\ (\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2)X'_{2,N} + (\pi - \bar{p}_3)X_{3,N}, & \text{se } N \in \{6, \dots, 30\} \end{cases}$$

dove le grandezze $X_{2,N}$, $X'_{2,N}$ e $X_{3,N}$ sono espresse rispettivamente da (22), (23) e (24). Risulta evidente che, per $N > 1$, il rapporto Z_N/G complessivo può essere scomposto in più componenti a seconda del numero di blocchi in cui è suddivisa la durata N della garanzia. Nello specifico, se $N \in \{2, \dots, 5\}$, allora Z_N/G è dato dalla somma di $(\pi - \bar{p}_1)$, per il primo blocco formato dal solo anno di ammissione, e di $(\pi - \bar{p}_2)X_{2,N}$, per il secondo blocco relativo agli anni dal 2° fino al valore di N . Analogamente, se $N \in \{6, \dots, 30\}$, allora Z_N/G si ottiene sommando a $(\pi - \bar{p}_1)$, per il primo anno, $(\pi - \bar{p}_2)X'_{2,N}$ per gli anni successivi fino al 5°, e $(\pi - \bar{p}_3)X_{3,N}$, per il terzo e ultimo blocco relativo agli anni dal 6° fino al valore di N . Sebbene per questa tipologia di operazioni non sia fornito dal Fondo alcun Quadro riassuntivo dell'efficacia contributiva, nella Tabella 6 sono riportati i valori di Z_N/G ipotizzando, a titolo di esempio, di adottare il metodo dei premi esenti con classe di rating $j = 5$, ossia $\pi = \pi_5^{sh}$, in quanto beneficiaria dell'importo garantito più elevato secondo l'ultima relazione annuale del Fondo (MCC, 2023). Per ogni $N \geq 1$, il rapporto Z_N/G complessivo, nell'ultima colonna a destra, è la somma dei valori relativi a ciascun blocco cui è applicata l'aliquota annuale fissa \bar{p}_b ($b = 1, 2, 3$), rispettivamente nelle colonne dalla seconda alla penultima. Ad esempio, per la durata $N = 10$ è $Z_N/G = 17,0038\%$, somma di $2,8000\%$, per l'anno di ammissione con aliquota $\bar{p}_1 = 1\%$, di $10,0113\%$, per gli anni dal 2° al 5° con aliquota $\bar{p}_2 = 0,25\%$, e infine di $4,1925\%$, per gli anni dal 6° al 10° con aliquota $\bar{p}_3 = 0,5\%$. Dalla Tabella 6 si nota che, mentre è costante la componente di Z_N/G relativa al primo blocco, per i due blocchi successivi le corrispondenti componenti di Z_N/G sono strettamente crescenti. Inoltre, per $N \in \{2, \dots, 5\}$, il peso relativo della prima componente di Z_N/G è massimo per $N = 2$, variando tra il 61,80% e il 29,33%, e dunque quello di $(\pi - \bar{p}_2)X_{2,N}$, che varia specularmente tra 38,20% e il 70,67%, è massimo per $N = 5$. Infine, per $N \in \{6, \dots, 30\}$, il peso relativo della prima componente di Z_N/G varia tra il 25,17% e il 7,07%, quello della seconda tra il 70,48% e il 30,49% e, dunque, quello della terza tra il 4,35% e il 62,44%.

Tabella 6: Rapporto Z_N/G per la tipologia "Operazioni sul capitale di rischio"

Durata N	Aliquota annuale \bar{p}_b , $b = 1, 2, 3$			Rapporto Z_N/G complessivo
	1% (Anno di ammissione)	0,25% (Dal 2° al 5° anno)	0,50% (Dal 6° al 30° anno)	
1	2,8000%	-	-	2,8000%
2	2,8000%	1,7308%	-	4,5308%
3	2,8000%	3,4321%	-	6,2321%
4	2,8000%	5,1040%	-	7,9040%
5	2,8000%	6,7465%	-	9,5465%
6	2,8000%	7,8393%	0,4838%	11,1231%
7	2,8000%	8,6179%	1,2325%	12,6504%
8	2,8000%	9,2002%	2,1366%	14,1368%
9	2,8000%	9,6516%	3,1354%	15,5870%
10	2,8000%	10,0113%	4,1925%	17,0038%
11	2,8000%	10,3045%	5,2848%	18,3893%
12	2,8000%	10,5477%	6,3969%	19,7446%
13	2,8000%	10,7524%	7,5184%	21,0708%
14	2,8000%	10,9270%	8,6415%	22,3685%
15	2,8000%	11,0774%	9,7611%	23,6385%
16	2,8000%	11,2082%	10,8729%	24,8811%
17	2,8000%	11,3229%	11,9740%	26,0969%
18	2,8000%	11,4241%	13,0620%	27,2862%
19	2,8000%	11,5140%	14,1353%	28,4494%
20	2,8000%	11,5943%	15,1925%	29,5868%
21	2,8000%	11,6664%	16,2324%	30,6988%
22	2,8000%	11,7313%	17,2544%	31,7857%
23	2,8000%	11,7901%	18,2578%	32,8479%
24	2,8000%	11,8435%	19,2421%	33,8856%
25	2,8000%	11,8921%	20,2070%	34,8991%
26	2,8000%	11,9365%	21,1523%	35,8889%
27	2,8000%	11,9773%	22,0779%	36,8551%
28	2,8000%	12,0147%	22,9835%	37,7982%
29	2,8000%	12,0491%	23,8693%	38,7184%
30	2,8000%	12,0809%	24,7353%	39,6161%

(Tasso di premio esente $\pi_5^{\text{sh}} = 3,8\%$)

7. CONCLUSIONI

Le garanzie statali su prestiti rappresentano uno strumento fondamentale di politica economica volto a favorire l'accesso al credito delle PMI, specialmente in contesti economici complessi o in periodi di forte incertezza. Per evitare distorsioni del mercato e garantire una distribuzione equa e trasparente degli aiuti di Stato, la normativa europea, ai sensi degli artt. 107-109 del TFUE (GUUE, 2016), richiede che le garanzie siano valutate accuratamente per verificare la loro compatibilità a norma di un'esenzione specifica, come espressa nei regolamenti *de minimis* e di esenzione per categoria.

In questo lavoro è stata ricavata la formulazione analitica del contenuto agevolativo degli aiuti di Stato concessi in forma di garanzia. Dopo aver delineato il contesto normativo di riferimento e le caratteristiche di una garanzia statale sui prestiti, sono stati esaminati i due strumenti di semplificazione consentiti per la quantificazione del premio di mercato adeguato di una garanzia per le PMI, in quanto la differenza tra detto livello minimo e il costo effettivamente pagato è considerata aiuto di Stato da esprimere in termini di equivalente sovvenzione lordo (ESL). Partendo dalla metodologia generale di misurazione dell'ESL, sono state quindi derivate le formule per il calcolo dell'elemento di aiuto nelle garanzie a favore delle PMI, relativamente alla modalità di rimborso di un prestito utilizzata dalle autorità italiane nell'ambito del metodo nazionale (GUUE, 2010). Infine, in relazione alla prassi operativa del Fondo di Garanzia per le PMI (Legge 662/1996), sono state esaminate alcune applicazioni che mostrano, oltre al calcolo diretto dell'ESL, la possibilità di studiarne le proprietà funzionali nonché di effettuare analisi di sensitività rispetto ai diversi parametri.

Per concludere, si evidenzia che, per quanto in questo lavoro siano stati trattati l'ammortamento francese e lo schema delle commissioni del principale sistema di garanzie pubbliche italiano, purtuttavia è possibile, nell'ambito della trattazione generale presentata, ricavare formule per il calcolo dell'elemento di aiuto nelle garanzie rilasciate da regimi che prevedono differenti modalità, sia di rimborso del prestito sia di pagamento delle commissioni. Pertanto, questo lavoro offre un approccio analitico che, partendo da premesse generali, possa essere applicabile a tutte le tipologie di aiuto di Stato concesse in forma di garanzia alle PMI, sia individualmente sia nell'ambito di uno specifico regime.

BIBLIOGRAFIA

- **Andini M., Boldrini M., Ciani E., de Blasio G., D'Ignazio A., Paladini A.** (2022), "Machine learning in the service of policy targeting: The case of public credit guarantees", in *Journal of Economic Behavior and Organization*, 198, pp. 434-475.
- **Arcuri M. C., Gai L., Ielasi F.** (2020), "Public credit guarantee schemes in supporting SMEs: An evaluation of effectiveness and impacts", in *International Journal of Business and Management*, 15(1), pp. 174-189.
- **Baldi C. E.** (2024), "La disciplina degli aiuti di Stato. Manuale critico a uso delle amministrazioni, delle imprese e dei consulenti", Maggioli Editore.
- **Broccardo E.** (2009), "A valuation method for the facilitated impact of State aid in the form of loan guarantee schemes", in *Bancaria*, 65(11), pp. 48-69.
- **Cascarino G., Gallo R., Palazzo F., Sette E.** (2022), "Public guarantees and credit additivity during the Covid-19 pandemic", Working paper, Banca d'Italia, 1369.
- **Caselli S., Corbetta G., Rossolini M., Vecchi V.** (2019), "Public credit guarantee schemes and SMEs' profitability: Evidence from Italy", in *Journal of Small Business Management*, 57(S2), pp. 555-578.
- **Ciurlia P., Quarta A.** (2024), "Metodologia generale per il calcolo dell'elemento di aiuto nei regimi di garanzia", in *Il Risparmio*, 72(1-2), pp. 21-68.
- **de Blasio G., De Mitri S., D'Ignazio A., Finaldi Russo P., Stoppani L.** (2018), "Public guarantees to SME borrowing. A RDD evaluation", in *Journal of Banking and Finance*, 96, pp. 73-86.
- **Erzegovesi L.** (2022), "Il processo di validazione e l'impatto sulle imprese", in Cocchieri S., Messina A., Nafissi L., (a cura di), *Più credito per tutti? Vent'anni del Fondo di Garanzia PMI, tra passato, crisi Covid e futuro*, Ecra - Edizioni del Credito Cooperativo, 115-125.
- **Gai L., Arcuri M. C., Ielasi F.** (2023), "How does government-backed finance affect SMEs' crisis predictors?", in *Small Business Economics*, 61(3), pp. 1205-1229.
- **Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana** (1996), *Legge 23/12/1996*, n. 662, *Misure di razionalizzazione della finanza pubblica*, 28/12/1996, n. 303.
- **Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana** (2020a), *Legge 24/04/2020*, n. 27, *Conversione in legge, con modificazioni, del Decreto-Legge 17 marzo 2020*, n. 18, *recante Misure di potenziamento del Servizio sanitario nazionale e di sostegno economico per famiglie, lavoratori e imprese connesse all'emergenza epidemiologica da COVID-19*, 29/04/2020, n. 110.

- **Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana** (2020b), Legge 05/06/2020, n. 40, Conversione in legge, con modificazioni, del Decreto-Legge 8 aprile 2020, n. 23, recante Misure urgenti in materia di accesso al credito e di adempimenti fiscali per le imprese, di poteri speciali nei settori strategici, nonché interventi in materia di salute e lavoro, di proroga di termini amministrativi e processuali, 06/06/2020, n. 143.
- **Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana** (2023), Legge 15/12/2023, n. 191, Conversione in legge, con modificazioni, del Decreto-Legge 18 ottobre 2023, n. 145, recante Misure urgenti in materia economica e fiscale, in favore degli enti territoriali, a tutela del lavoro e per esigenze indifferibili, 16/12/2023, n. 293.
- **Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea** (2000), Comunicazione della Commissione sull'applicazione degli articoli 87 e 88 del trattato CE agli aiuti di Stato concessi sotto forma di garanzie, 11/03/2000, C/71-07, pp. 14-18.
- **Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea** (2008a), Comunicazione della Commissione relativa alla revisione del metodo di fissazione dei tassi di riferimento e di attualizzazione, 19/01/2008, C/14-02, pp. 6-9.
- **Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea** (2008b), Comunicazione della Commissione sull'applicazione degli articoli 87 e 88 del trattato CE agli aiuti di Stato concessi sotto forma di garanzie, 20/06/2008, C/155-02, pp. 10-22.
- **Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea** (2010), Autorizzazione degli aiuti di Stato sulla base degli articoli 107 e 108 del TFUE - Casi contro i quali la Commissione non solleva obiezioni, 21/08/2010, C/226-02, pp. 6-7.
- **Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea** (2016), Versione consolidata del trattato sull'Unione europea e del trattato sul funzionamento dell'Unione europea, 07/06/2016, C/202-01, pp. 1-388.
- **Mediocredito Centrale** (2023), Report 31 dicembre 2023. Il Fondo di Garanzia per le PMI (Legge 662/1996, art. 2 comma 100, lett. a). Disponibile in: https://www.fondidigaranzia.it/wp-content/uploads/2024/02/Relazione-Dicembre-2023_Sito.pdf.
- **Lagazio C., Persico L., Querci F.** (2021), "Public guarantees to SME lending: Do broader eligibility criteria pay off?", in *Journal of Banking and Finance*, 133, 106287.
- **Ministero delle Imprese e del Made in Italy** (2023), Relazione sugli interventi di sostegno alle attività economiche e produttive. Settembre 2023. Disponibile in: https://www.mimit.gov.it/images/stories/documenti/Relazione_interventi_sostegno_attivita_economiche_e_produttive_2023_L_266-97.pdf.
- **Santero-Sánchez R., Sepúlveda-Molina A, de la Fuente-Cabrero C., Laguna-Sánchez M. del P.** (2024), "Credit guarantee schemes for small and medium business: A comprehensive review of the literature", Disponibile in SSRN: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4872124>.

▶ APPENDICE

Si mostrano di seguito i passaggi matematici che portano alle formule (19)-(20) e (21)-(24).

Dimostrazione Proposizione 1. Nelle ipotesi fatte, si ha che la tipologia di commissioni è descritta dalla (9) e dunque, sostituendo nella (18), per la variabile Z_N si ottiene

$$Z_N = G \left[\pi \sum_{n=1}^N \frac{a_{N-n+1|i_*}}{a_{N|i_*}} (1 + i_*)^{-n+1} - p_0 \right] \quad (\text{A.1})$$

La sommatoria in (A.1) è della forma

$$X_{1,N} := \frac{1}{a_{N|i_*}} \sum_{n=1}^N a_{N-n+1|i_*} v_*^{n-1}$$

dove $v_* = (1 + i_*)^{-1}$. Per $i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$, in base alla (17) si ha

$$\begin{aligned} X_{1,N} &= \frac{1 - v_*}{v_*(1 - v_*^N)} \sum_{n=1}^N \frac{v_*(1 - v_*^{N-n+1})}{1 - v_*} v_*^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - v_*^N} \left(\frac{1}{v_*} \sum_{n=1}^N v_*^n - \sum_{n=1}^N v_*^N \right) \\ &= \frac{1}{1 - v_*^N} \left[\frac{1}{v_*} \frac{v_*(1 - v_*^N)}{1 - v_*} - N v_*^N \right] \\ &= \frac{1}{1 - v_*} - \frac{N}{v_*^{-N} - 1} \end{aligned}$$

L'espressione di $X_{1,N}$ in termini del tasso $i_* \neq 0$ è

$$X_{1,N} = \frac{1 + i_*}{i_*} - \frac{N}{(1 + i_*)^N - 1} \quad (\text{A.2})$$

Per $i_* = 0$, dalla (17) si ha che la grandezza $X_{1,N}$ assume la forma semplificata

$$X_{1,N} = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^N (N + 1) - \sum_{n=1}^N n \right]$$

e dopo opportune semplificazioni si ottiene

$$X_{1,N} = \frac{N + 1}{2} \quad (\text{A.3})$$

La coppia (A.2)-(A.3) definisce la (20) e sostituendo in (A.1) si ricava la (19). Infine, per $N \rightarrow 1^+$ risulta $X_{1,1} = 1$, per cui è $Z_1 = G(\pi - p_0)$ in accordo con la (15) e la dimostrazione è completa.

Dimostrazione Proposizione 2. Nelle ipotesi fatte, si ha che la tipologia di commissioni è descritta dalla (12) e dunque, sostituendo nella (18), ponendo $v_* = (1 + i_*)^{-1}$ e ordinando i termini, per la variabile Z_N si ottiene

$$Z_1 = G(\pi - \bar{p}_1), \quad \text{se } N = 1 \quad (\text{A.4})$$

$$Z_N = G \left[(\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2) \sum_{n=2}^N \frac{a_{\overline{N-n+1}|i_*}}{a_{\overline{N}|i_*}} v_*^{n-1} \right], \quad \text{se } N \in \{2, \dots, 5\} \quad (\text{A.5})$$

$$Z_N = G \left[(\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2) \sum_{n=2}^5 \frac{a_{\overline{N-n+1}|i_*}}{a_{\overline{N}|i_*}} v_*^{n-1} + (\pi - \bar{p}_3) \sum_{n=6}^N \frac{a_{\overline{N-n+1}|i_*}}{a_{\overline{N}|i_*}} v_*^{n-1} \right], \quad \text{se } N \in \{6, \dots, 30\} \quad (\text{A.6})$$

a seconda dell'insieme a cui appartiene la durata N . Le sommatorie in (A.5) e (A.6) sono della forma

$$X_{2,N} := \frac{1}{a_{\overline{N}|i_*}} \sum_{n=2}^N a_{\overline{N-n+1}|i_*} v_*^{n-1}$$

$$X'_{2,N} := \frac{1}{a_{\overline{N}|i_*}} \sum_{n=2}^5 a_{\overline{N-n+1}|i_*} v_*^{n-1}; \quad X_{3,N} := \frac{1}{a_{\overline{N}|i_*}} \sum_{n=6}^N a_{\overline{N-n+1}|i_*} v_*^{n-1}$$

Inizialmente si considera $N = 1$ per cui si paga l'unica commissione in base all'aliquota \bar{p}_1 per l'anno di ammissione. Si verifica subito che la (18) si riduce a (A.4), in accordo con la (15). Si considera poi $N \in \{2, \dots, 5\}$ per cui, oltre alla commissione iniziale secondo l'aliquota \bar{p}_1 , si pagano le commissioni in base all'aliquota \bar{p}_2 per gli anni dal 2° fino alla durata N . Dalla precedente dimostrazione segue che $X_{2,N} = X_{1,N} - X_{1,1}$, dalla quale, con semplici passaggi algebrici, si ricava la (22) e sostituendo in (A.5) si ha

$$Z_N = G \left[(\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2) X_{2,N} \right], \quad \text{se } N \in \{2, \dots, 5\} \quad (\text{A.7})$$

Infine si considera $N \in \{6, \dots, 30\}$ per cui, oltre alla commissione iniziale secondo l'aliquota \bar{p}_1 , si pagano le commissioni, per gli anni dal 2° fino al 5°, in base all'aliquota \bar{p}_2 e, per gli anni dal 6° fino alla durata N , in base all'aliquota \bar{p}_3 . Per la grandezza $X'_{2,N}$, dalla (17)

per $i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ segue

$$\begin{aligned}
 X'_{2,N} &= \frac{1 - v_*}{v_*(1 - v_*^N)} \sum_{n=2}^5 \frac{v_*(1 - v_*^{N-n+1})}{1 - v_*} v_*^{n-1} \\
 &= \frac{1}{1 - v_*^N} \left[\frac{1}{v_*} \left(\sum_{n=1}^5 v_*^n - v_* \right) - \left(\sum_{n=1}^5 v_*^N - v_*^N \right) \right] \\
 &= \frac{1}{1 - v_*^N} \left[\frac{1}{v_*} \left(\frac{v_*(1 - v_*^5)}{1 - v_*} - v_* \right) - (5v_*^N - v_*^N) \right] \\
 &= \frac{1}{1 - v_*} \frac{v_*(1 - v_*^4)}{1 - v_*^N} - \frac{4}{v_*^{-N} - 1}
 \end{aligned}$$

dove l'opportuna manipolazione algebrica consentirà allo stesso modo di ricavare la grandezza $X_{3,N}$. Pertanto in termini del tasso $i_* \neq 0$ si ha

$$X'_{2,N} = \frac{(1 + i_*)^N - (1 + i_*)^{N-4}}{i_* [(1 + i_*)^N - 1]} - \frac{4}{(1 + i_*)^N - 1} \tag{A.8}$$

Per $i_* = 0$, dalla (17) si ha che la grandezza $X'_{2,N}$ assume la forma semplificata

$$X'_{2,N} = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^5 (N + 1) - (N + 1) - \left(\sum_{n=1}^5 n - 1 \right) \right]$$

e semplificando si ottiene

$$X'_{2,N} = 4 - \frac{10}{N} \tag{A.9}$$

Analogamente per $X_{3,N}$ dalla (17), per $i_* \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$, risulta

$$\begin{aligned}
 X_{3,N} &= \frac{1 - v_*}{v_*(1 - v_*^N)} \sum_{n=6}^N \frac{v_*(1 - v_*^{N-n+1})}{1 - v_*} v_*^{n-1} \\
 &= \frac{1}{1 - v_*^N} \left[\frac{1}{v_*} \left(\sum_{n=1}^N v_*^n - \sum_{n=1}^5 v_*^n \right) - \left(\sum_{n=1}^N v_*^N - \sum_{n=1}^5 v_*^N \right) \right] \\
 &= \frac{1}{1 - v_*^N} \left[\frac{1}{v_*} \left(\frac{v_*(1 - v_*^N)}{1 - v_*} - \frac{v_*(1 - v_*^5)}{1 - v_*} \right) - (Nv_*^N - 5v_*^N) \right] \\
 &= \frac{1}{1 - v_*} \frac{v_*^5(1 - v_*^{N-5})}{1 - v_*^N} - \frac{N - 5}{v_*^{-N} - 1}
 \end{aligned}$$

e in termini del tasso $i_* \neq 0$ è

$$X_{3,N} = \frac{(1+i_*)^{N-4} - (1+i_*)}{i_*[(1+i_*)^N - 1]} - \frac{N-5}{(1+i_*)^N - 1} \quad (\text{A.10})$$

Per $i_* = 0$, dalla (17) si ha che la grandezza $X_{3,N}$ assume la forma semplificata

$$X_{3,N} = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^N (N+1) - \sum_{n=1}^5 (N+1) - \left(\sum_{n=1}^N n - \sum_{n=1}^5 n \right) \right]$$

e dopo semplici passaggi si ottiene

$$X_{3,N} = \frac{N-9}{2} + \frac{10}{N} \quad (\text{A.11})$$

Le coppie (A.8)-(A.9) e (A.10)-(A.11) definiscono rispettivamente la (23) e la (24), per cui sostituendo in (A.6) si ha

$$Z_N = G[(\pi - \bar{p}_1) + (\pi - \bar{p}_2)X'_{2,N} + (\pi - \bar{p}_3)X_{3,N}], \quad \text{se } N \in \{6, \dots, 30\} \quad (\text{A.12})$$

Mettendo insieme (A.4), (A.7) e (A.12) si ottiene la (21) e la dimostrazione è completa.



IL SISTEMA PENSIONISTICO OBBLIGATORIO ITALIANO: I RISULTATI DI BILANCIO E GLI ANDAMENTI NEI 35 ANNI DI MONITORAGGIO DAL 1989 AL 2023

*THE ITALIAN MANDATORY PENSION SYSTEM:
BUDGETARY RESULTS AND TRENDS IN THE 35
YEARS OF MONITORING FROM 1989 TO 2023*

Centro Studi e Ricerche Itinerari Previdenziali

mara.guarino@itinerariprevidenziali.it

Il sistema pensionistico obbligatorio è gestito per il 96% circa della spesa e delle entrate contributive dall'INPS che a seguito di vari provvedimenti legislativi succedutisi negli ultimi trent'anni ha incorporato quasi tutte le gestioni previdenziali. La quota residua, per il 4% circa, è gestita dalle Casse *previdenziali privatizzate* dei liberi professionisti. Giunto nel 2025 alla sua undicesima edizione, il Rapporto sul Bilancio del Sistema Previdenziale italiano, curato

dal Comitato Tecnico Scientifico e dagli esperti del Centro Studi e Ricerche Itinerari Previdenziali, è uno strumento in grado di racchiudere in un solo documento sia una visione d'insieme del complesso sistema previdenziale italiano, sia una riclassificazione all'interno del più ampio bilancio dello Stato. Estratto dal Rapporto, il *Paper* presenta i risultati di bilancio e gli andamenti nei 35 anni di monitoraggio dal 1989 al 2023 del sistema pensionistico obbligatorio italiano.

Parole chiave: Sistema pensionistico, gestioni previdenziali, andamento.

About 96% of the compulsory pension system is managed by INPS, which, as a result of various legislative measures over the last 30 years, has incorporated almost all social security schemes. The remainder, about 4 per cent, is managed by the privatized pension funds of the liberal professions. Now in its eleventh edition, the Report on the Balance Sheet of the Italian Social Security System, edited by the Technical-Scientific

Committee and experts of the Itinerari Previdenziali Study and Research Centre, is a tool capable of encompassing in a single document both an overview of the complex Italian social security system and a reclassification within the broader State budget. Extracted from the Report, the *Paper* presents the budgetary results and trends over the 35 years of monitoring from 1989 to 2023 of the Italian obligatory pension system.

Keywords: *Pension system, social security schemes, trends.*

1.1 IL BILANCIO DEL SISTEMA PENSIONISTICO OBBLIGATORIO NEL 2023

Nel 2023 la **spesa pensionistica** relativa a tutte le gestioni previdenziali al netto della quota GIAS è ammontata a **267.107,5 milioni** di euro (247.578 milioni nel 2022), con un aumento di 19,53 miliardi (+7,88%, rispetto al +3,9% del 2022 sul 2021), quasi totalmente imputabile alla rivalutazione delle rendite all'inflazione¹ e in parte dall'aumento dei pensionati a causa delle misure di anticipazione pensionistica varate dai vari Governi in questi ultimi 10 anni. Il quadro finanziario complessivo della previdenza obbligatoria è evidenziato dalla **tabella 1.a e seguenti** che sintetizza le uscite per prestazioni previdenziali, le entrate contributive, i saldi di gestione e le quote di trattamenti pensionistici trasferite attraverso la GIAS; sono altresì evidenziati i dati relativi al complesso delle Casse previdenziali privatizzate regolate dai D.lgs. 509/94 e 103/96 che, pur rientrando nel sistema obbligatorio, sostanzialmente non gravano sul bilancio dello Stato (le tavole di dettaglio si possono visualizzare sia alla fine dei capitoli sia sull'apposita sezione web del Rapporto)².

Le **entrate contributive**, dopo la flessione del 2020 dovuta alla pandemia da COVID-19 (195.400 milioni di euro), hanno ripreso a salire per effetto dell'aumento dei lavoratori attivi, attestandosi nel **2023** a 236.685,7 milioni di euro³.

Il **saldo tra contributi e prestazioni** ha presentato nel 2023, come accade da molti anni, un risultato negativo per 30.421 milioni, riportandosi sui valori del 2021 (-30.006 milioni contro i **22.645 milioni** del 2022).

1 Le pensioni sono rivalutate in base all'inflazione rilevata nell'anno precedente; dal 1997 numerose leggi hanno variato in riduzione l'indicizzazione delle pensioni superiori al trattamento minimo o a suoi multipli (3 o 5 volte il TM); per gli anni 2022 e 2023 l'abbattimento delle pensioni medio/alte è stato ancora più marcato.

2 Si veda il sito web www.itinerariiprevidenziali.it.

3 Come negli anni precedenti, non è ricompreso nelle entrate il contributo aggiuntivo di 10.800 milioni di euro a carico dello Stato (v. nota 2 alla tabella 1.a).

Nel 2023 sono aumentati sia i beneficiari delle prestazioni pensionistiche e assistenziali sia i lavoratori occupati; sono altresì aumentati, grazie ai rinnovi di molti contratti nazionali, i redditi degli occupati che, in parte, hanno recuperato l'inflazione. Sono altresì aumentati anche i valori nominali dei redditi pensionistici soprattutto per i percettori di prestazioni fino a 4 volte il minimo.

Per il 2023 si possono fare le seguenti considerazioni sul disavanzo totale e delle singole gestioni:

- a) dai dati delle *tabelle 1.a e B.35.a* si evidenzia che le gestioni obbligatorie INPS in attivo sono quattro: il **FPLD** con un attivo di 15.107,9 milioni⁴; la **Gestione Commercianti** con un attivo di 1.154 milioni; la **Gestione dei lavoratori dello spettacolo (ex ENPALS)** con 468,71 milioni in miglioramento rispetto agli anni precedenti e la **Gestione separata**, dei cosiddetti **Lavoratori Parasubordinati**, che presenta un saldo attivo di 8.627 milioni anch'essa in continuo miglioramento; il consistente attivo di quest'ultima gestione deriva dal fatto che ha ancora pochi pensionati e pensioni basse.
- b) Presentano inoltre un attivo di bilancio (*tabella 1.a*) le Casse dei liberi professionisti con un saldo positivo complessivo di **4.318 milioni** con un trend che permane positivo. Si tratta, per i liberi professionisti come per i parasubordinati, di gestioni che presentano ancora un buon rapporto attivi/pensionati.
- c) L'apporto complessivo delle gestioni attive pari a **29.675,6 milioni** consente di contenere il disavanzo totale tra uscite ed entrate in 30.421,8 milioni. Senza queste poste attive il deficit del sistema pensionistico avrebbe raggiunto l'importo di **60.097,4 milioni**.
- d) Tutte le altre gestioni presentano disavanzi: il più elevato è quello dei dipendenti pubblici, in continuo peggioramento negli anni, con un **saldo negativo di 44.021,8 milioni** che si ridurrebbe se venisse computato nelle entrate il contributo aggiuntivo dello Stato alle Casse pensioni dei dipendenti Statali che ammonta a 10.800 milioni. Seguono per dimensione dei disavanzi, come meglio illustrato nel capitolo successivo, il Fondo degli artigiani, dei Coltivatori Diretti, Coloni e Mezzadri e il Fondo di previdenza dei Giornalisti confluita in INPS che anche quest'anno presenta un saldo negativo per 272,78 milioni, tra i peggiori saldi di gestione considerando anche l'esigua platea di contribuenti e pensionati. I saldi negativi dei fondi speciali che, al momento dell'incorporazione nel FPLD erano mediamente elevati e in progressivo peggioramento, non possono essere correttamente valutati dipendono dal fatto che i nuovi assunti dalla data di incorporazione nel FPLD vengono iscritti a questo fondo mentre i pensionati, che aumentano di anno in anno, vengono caricati sulle ex gestioni peggiorandone enormemente i saldi. Presentano saldi molto negativi il Fondo delle ex FF.SS e quello delle Poste.

4 Va considerato che sul totale delle gestioni dei lavoratori dipendenti privati che comprendono il FPLD e i cosiddetti fondi speciali come chiarito in seguito, gravano i disavanzi dei Fondi speciali in esso confluiti (in complesso 9.921 milioni).



1.2 LE PRINCIPALI NOVITÀ PENSIONISTICHE PER IL 2024

La Legge di Bilancio per il 2024 (29 dicembre 2023), per il sistema pensionistico-assistenziale, ha previsto una serie di misure, restrittive per i requisiti pensionistici e più favorevoli per i redditi medio bassi e per le pensioni basse. Per **Quota 103** (in pensione con 62 anni d'età e 41 di contributi) introdotta dalla Legge di Bilancio per il 2023, in sostituzione della precedente Quota 102 (64 anni d'età e 38 di contributi) per chi matura i requisiti nel corso del 2024 l'importo del trattamento verrà interamente determinato secondo le regole di calcolo del metodo contributivo. Inoltre, si abbassa il tetto mensile lordo dell'assegno, che non potrà essere superiore a quattro volte la pensione minima, fino al raggiungimento dell'età per la vecchiaia attualmente a 67 anni (nel 2023 era pari a cinque volte il minimo); stretta anche sulle finestre di uscita: i tempi necessari tra la maturazione dei requisiti e l'erogazione della pensione passano da 3 a 7 mesi per i dipendenti privati e da 6 a 9 mesi per i pubblici. Chi sceglie di rinunciare all'uscita dopo aver raggiunto i requisiti, potrà invece chiedere che la contribuzione a suo carico, pari al 9,19%, venga inserita in busta paga mentre la quota a carico del datore di lavoro continuerà ad essere versata all'INPS; la parte di contributi incassata non contribuisce a incrementare la pensione. Per chi opta per Quota 103 (come per quota 100 e 102) è vigente il divieto di lavorare e quindi non potrà cumulare redditi da lavoro con quelli da pensione fino al raggiungimento dei 67 anni di età. Chi ha maturato i requisiti di Quota 103 entro il 31 dicembre 2023 potrà richiedere la pensione negli anni seguenti mantenendo le condizioni previste dall'attuale normativa. Non potranno più esercitare il diritto nel 2025 coloro che hanno maturato i requisiti di Quota 100 (62 anni di età e 38 di contributi entro il 31/12/2021) e Quota 102 (64 anni di età e 38 di contributi entro il 31/12/2022). **Opzione donna** già fortemente riformata nel 2023 con limitazione nelle categorie di accesso alle sole lavoratrici: a) licenziate o dipendenti in aziende con tavolo di crisi aperto presso il Ministero; b) persone con disabilità pari o oltre il 74%; c) che assistono, da almeno 6 mesi, persone disabili conviventi, con disabilità in situazione di gravità in base alla legge 104 del 1992 di primo o secondo grado di parentela. In quest'ultimo caso per ultra 70enni il 2024 vede un aumento del requisito anagrafico, che passa da 60 a 61 anni d'età, ridotto di un anno per ogni figlio nel limite di due anni mentre resta fermo il requisito di 35 anni di contribuzione. Anche in questo caso il calcolo della pensione è interamente con il metodo contributivo e con finestre mobili di 12 mesi per le lavoratrici dipendenti e 18 mesi per le autonome.

APE sociale (prestazione assistenziale e non pensionistica) è anch'essa prorogata al 2024 ma si potrà accedere con **63 anni e 5 mesi d'età**, 5 mesi in più rispetto al 2023 e potranno utilizzarla i lavoratori disoccupati con almeno 63 anni e 5 mesi di età e 30 anni di contribuzione a seguito di cessazione del rapporto di lavoro per licenziamento, anche collettivo, dimissioni per giusta causa o risoluzione consensuale o dipendenti di aziende con tavolo di crisi aperto presso il Ministero e che hanno esaurito i periodi di disoccupazione, tipo Naspi; le persone con 63 anni e 5 mesi di età e 30 anni di contribuzione, con disabilità pari o oltre il 74% e riconosciuti invalidi civili; i lavoratori sempre con 63

anni e 5 mesi di età e 30 anni di contribuzione che assistono da almeno 6 mesi persone disabili conviventi, con disabilità grave in base alla legge 104 del 1992, siano di primo o secondo grado di parentela (solo per over 70); i lavoratori dipendenti che svolgono mansioni cosiddette “gravose” con almeno 63 anni e 5 mesi di età e 36 anni di contribuzione e che al momento della domanda di accesso all’APE sociale, abbiano svolto una o più delle professioni contenute nell’Allegato n. 3 alla legge n. 234/2021 per almeno sei anni negli ultimi sette oppure per almeno sette anni negli ultimi dieci. Per il 2024 è prevista **l’incumulabilità totale della prestazione con i redditi** di lavoro dipendente o autonomo ad eccezione del lavoro occasionale entro un massimo di 5.000 euro annui.

Nel **metodo contributivo** (che però inizierà dopo il 2035) viene eliminato il requisito che per accedere alla pensione con 67 anni e 20 anni di contributi, l’importo pensionistico sia pari a 1,5 volte quello dell’assegno sociale; viene modificato anche l’importo della pensione anticipata con il contributivo a 64 anni d’età e 20 di contributi che passa da 2,8 a 3 volte l’importo dell’assegno sociale con un massimo di 5 volte il minimo fino ai 67 anni e con 3 mesi di finestra. Resta a 2,8 per le donne con un figlio e a 2,6 per le donne con due o più figli. È confermata la cosiddetta **Pace contributiva** che per il 2024/25 offre la possibilità per i lavoratori interamente nel contributivo di riscattare in modo agevolato i “vuoti contributivi”. Un sistema sulla falsariga del riscatto della laurea. Si potrà riscattare un periodo massimo di 5 anni, in unica soluzione oppure in un massimo di 120 rate mensili, di importo non inferiore a 30 euro. Tale onere è detraibile al 50 % dai redditi nell’anno del versamento e nei 4 successivi. Inoltre, è confermato per tutto il 2024 il **taglio del cosiddetto cuneo contributivo** con una riduzione del 7% dei contributi previdenziali per i redditi fino a 25mila euro, del 6% per i redditi fino a 35mila euro. È prorogata per il 2024 anche la **extra rivalutazione delle pensioni minime** (nel 2023 1,5% per gli infra 75enni e 6,4% per gli over 75; nel 2024 2,7%) ma con un décalage nei prossimi tre anni mentre per le pensioni oltre 4 volte il minimo viene ripristinata la rivalutazione 100% fino a 3 volte il minimo, 90% tra 3 e 5 volte il TM e 75% sulla quota di pensione eccedente 5 volte il TM. Sono confermati gli scivoli per i prepensionamenti realizzati con i **Contratti di Espansione** e la **Isopensione** fino al 2026.

1.3 LE FASI TEMPORALI DAL 1989 AL 2023 NEI 35 ANNI DI ANALISI

Per inquadrare e analizzare l’evoluzione del sistema pensionistico nei trentacinque anni per i quali esistono dati statistici omogenei si è ritenuto opportuno suddividere l’intero arco di tempo in quattro sotto periodi. Essi hanno ampiezza simile ma connotati diversi, sia per i profili delle principali variabili economiche, sia per ciò che riguarda la dinamica della spesa per pensioni e delle variabili

che concorrono alla sua determinazione, ai risultati delle gestioni e alla sostenibilità finanziaria dell’intero sistema. I quattro sotto periodi individuati sono i seguenti:

- **1989-1997** - Sono gli anni che hanno visto le prime significative riforme del sistema pensionistico introdotte dal Governo Amato nel 1992 e poi dal governo Dini nel 1995. Esse hanno disposto l'avvio di un processo di armonizzazione dei regimi pensionistici di diverse categorie, di particolare peso quella dei pubblici dipendenti, rispetto al regime generale del Fondo dei dipendenti privati, con un graduale aumento dell'età pensionabile, degli anni di contribuzione e con sostanziali modifiche nel calcolo e nell'indicizzazione delle pensioni;
- **1998-2006** - Sono i nove anni successivi all'adozione dell'articolata riforma Dini (n.335/95), con l'applicazione graduale del nuovo metodo di calcolo contributivo, a cui si aggiunsero gli effetti di misure contenute in altre riforme adottate dal Governo Prodi 1997 (modifica dell'età pensionabile, equiparazione delle regole tra dipendenti pubblici e privati, ecc.) e dal Governo Berlusconi 2001 (elevazione dei limiti di età e anzianità con effetto differito, incentivi alla prosecuzione volontaria dopo il raggiungimento dei requisiti per il pensionamento, ecc.);
- **2007-2014** - Questi anni si segnalano soprattutto per una lunga crisi finanziaria ed economica, caratterizzata inizialmente dagli effetti distorti di minori controlli sui mercati finanziari che originarono la bolla immobiliare e il crollo dei titoli subprime, a cui fece seguito il grave problema della sostenibilità dei debiti sovrani. Questo periodo ha visto altri due momenti di riforma in campo pensionistico indotti soprattutto da esigenze di risanamento del bilancio pubblico, il primo durante il Governo Berlusconi e il secondo deciso dal Governo Monti e noto come riforma Fornero⁵, ambedue orientati ad aumentare e rendere più restrittivi i requisiti per il pensionamento;
- **2015-2023** - Rispetto al periodo precedente gli ultimi anni hanno visto dapprima una leggera ripresa della crescita economica, la cui dinamica è stata drasticamente ribaltata dagli effetti della pandemia nel 2020. Le brusche oscillazioni sono poi continuate con importanti recuperi nel biennio successivo, frustrati a loro volta dagli influssi negativi dei conflitti in Ucraina e nell'area medio-orientale che, oltre a un rapido e forte rialzo dei prezzi, hanno riportato la maggior parte dei paesi europei a tassi di crescita economica molto bassi. Per quanto riguarda le pensioni, all'interno di questo periodo non vi sono state sostanziali modifiche di sistema ma l'adozione di diverse misure di "mitigazione" dei requisiti previsti dalla riforma Fornero⁷, ossia nuove forme di anticipo dell'età di pensionamento, con le relative conseguenze al ribasso sui risparmi di spesa inizialmente previsti⁶.

5 Tra le misure di deroga dei requisiti fissati dalla riforma Fornero (art. 24 del D. Lgs. 201/2011) per agevolare l'anticipo dell'età di pensionamento si possono citare: le "nove salvaguardie" di alcune tipologie di lavoratori per i quali l'aumento dei requisiti avrebbe comportato il venir meno sia della retribuzione che della pensione; le misure della Legge di Bilancio del 2015 volte a ridurre le penalità della legge Fornero sulle pensioni liquidate a soggetti di età inferiore ai 62 anni, penalità definitivamente abolite con Legge di Bilancio del 2017; una misura molto discussa del primo Governo Conte di anticipazione del pensionamento conosciuta come "Quota 100", i cui requisiti validi per il biennio 2019-2020 sono stati parzialmente innalzati nei successivi tre anni 2021-2023.

6 Una quantificazione dell'impatto economico dei provvedimenti che hanno facilitato le uscite anticipate è presente nell'ultimo Rapporto MEF-RGS che, adottando il cosiddetto "scenario nazionale", valuta per il

1.4 L'ANALISI DEL BILANCIO PREVIDENZIALE NEL 2023 E IL PESO DELLE VARIABILI ECONOMICHE

Nel 2023, ultimo anno del presente Rapporto, la **spesa per pensioni** del sistema obbligatorio⁷ (Fondi gestiti dall'INPS e dalle Casse Private) è ammontata a **267,1 miliardi**, con un incremento in valore corrente del 7,9% sul periodo precedente (**tabella 1 a e seguenti**). Questo aumento si deve in parte al maggior numero di pensioni erogate, 17 milioni e 375mila nel 2023 contro 17 milioni e 364mila nell'anno precedente (+0,07%), ma in misura ben maggiore esso esprime la rivalutazione delle pensioni all'impennata di inflazione dell'anno precedente. Dell'adeguamento hanno beneficiato, soprattutto i trattamenti minimi (+8,1%), mentre i tetti alla perequazione per le pensioni oltre quattro volte il minimo hanno determinato risparmi di spesa per circa 3,6 miliardi nel 2023 (2,2 al netto delle tasse) e una stima di 6,8 miliardi (oltre 4,4 netti) per il 2024, con una conseguente perdita di potere d'acquisto dei redditi da pensione che nel caso dei trattamenti oltre sei volte il minimo supera il 10% nell'ultimo biennio. Poiché questi dati riguardano anni di forte aumento dei prezzi, dato il particolare meccanismo di adeguamento all'inflazione delle pensioni⁸, per capire l'effettivo andamento della spesa è più appropriato fare ricorso ai tassi di variazione reale. Nella fattispecie, l'aumento reale della spesa nel 2023 risulta essere del 2,5% in base all'indice FOI e del 2,2% con l'indice NIC⁹.

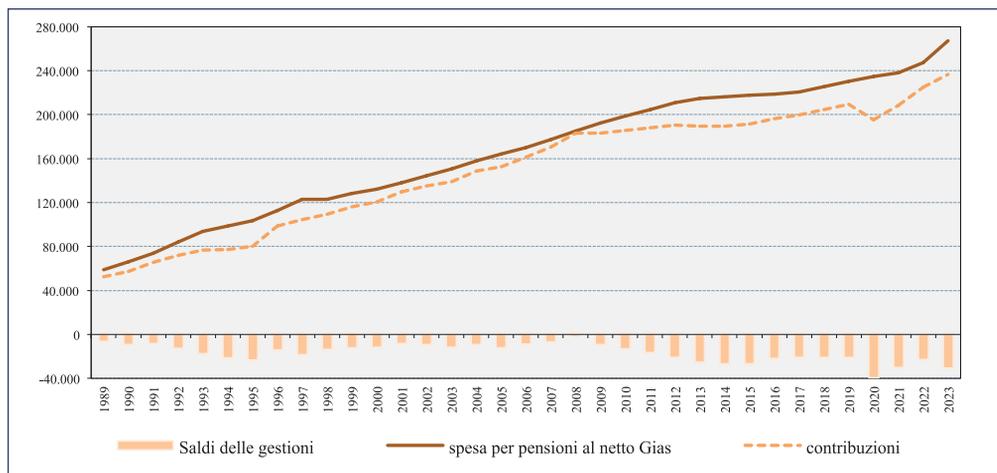
Va detto che anche in termini reali queste variazioni superano i valori medi del periodo 2015-2023, di cui si dirà più avanti, che sono al di sotto dello 0,4% medio annuo calcolati con ambedue gli indici. Nel valutare l'entità di questi incrementi, va rilevato che il biennio 2022-2023 ha avuto tassi medi di inflazione dell'8,1% e del 5,4% e che, a causa del ritardo nell'adeguamento ai prezzi, la spesa per pensioni nel 2022 è diminuita in termini reali del 4,2%. Ciò comporta che la variazione registrata nel 2023 è per la maggior parte attribuibile al recupero della capacità di spesa dei redditi da pensione e non tanto a un'inversione dei bassi tassi

periodo 2019-2023 una maggiore incidenza percentuale della spesa in rapporto al PIL "pari in media a oltre 0,4 punti l'anno". Vedi: Ministero dell'Economia e delle Finanze, Dipartimento della Ragioneria Generale dello Stato, *Le tendenze di medio-lungo periodo del sistema pensionistico e socio-sanitario*, aggiornamento 2024, Roma, giugno 2024.

- 7 Nel presente Rapporto, la "spesa per pensioni" è quella inizialmente definita nei Rapporti del "Nucleo di Valutazione della Spesa Previdenziale (NVSP)", organismo che ha cessato le attività nel 2012. Per le differenze con altre definizioni di spesa pensionistica si vedano Appendice 2 del presente Rapporto (Definizione dei diversi aggregati di spesa) e (Un confronto quantitativo per il periodo 1999-2020) in cui le differenze sono espresse anche in punti percentuali del rapporto tra spesa per pensioni e PIL; MEF-RGS, *Le tendenze di medio-lungo periodo del sistema pensionistico e socio-sanitario*, Roma, luglio 2023.
- 8 Ogni anno le pensioni si rivalutano in base all'indice medio dei prezzi al consumo per famiglie di operai e impiegati relativo all'anno precedente calcolato dall'Istat. La percentuale di rivalutazione è indicata in via provvisoria e conguagliata nell'anno seguente. Oltre a questo sistematico ritardo nell'indicizzare il valore delle pensioni rispetto all'inflazione, i trattamenti pensionistici medio alti, cioè superiori a quattro volte il trattamento minimo (circa 2.270 euro mensile lordo) sono state oggetto di una significativa riduzione delle aliquote di indicizzazione che ha ridotto per fasce crescenti la percentuale di adeguamento delle pensioni ai prezzi da 80% fino al 22% del tasso di inflazione Istat da applicare sull'ammontare dell'intera pensione.
- 9 Indici dei prezzi al consumo: per le famiglie di operai e impiegati (FOI) e per l'intera collettività nazionale (NIC).

di crescita che hanno caratterizzato gli anni successivi alla crisi del periodo 2008-2014¹⁰. Passando al lato delle **entrate contributive**, il valore del 2023 (**236,7 miliardi**) equivale a un incremento nominale del 5,2% sull'anno precedente, e a un risultato negativo di bilancio tra contribuzioni e uscite per pensioni al netto delle prestazioni assistenziali pari a -30,4 miliardi. Tale saldo corrisponde all'11,4% della spesa ed è molto prossimo alla media del periodo 2015-2023 pari all'11,1%¹¹.

Figura 1.1 - Andamento delle gestioni previdenziali (milioni di euro)



Analizzando le **entrate contributive**, le **spese per prestazioni** al netto della quota assistenziale e il relativo **saldo** per l'intero arco di tempo considerato (**figura 1.1**), si rivela come i disavanzi di gestione siano sempre presenti ma con intensità e andamenti diversi. In dettaglio, nei tre momenti di maggiore rallentamento dell'economia (1992-93, 2008-2014 e 2020) il divario tende ad aumentare, mentre negli anni successivi alle riforme pensionistiche più incisive (dal 1996 in poi e dopo il 2012) i bilanci migliorano o, comunque, gli andamenti di entrate e uscite si riallineano. La sottostante relazione tra andamento dell'economia ed equilibrio finanziario del sistema pensionistico verrà evidenziata anche nelle pagine successive; già da ora però è giusto sottolineare che sui risultati gestionali non pesa solo la spesa per prestazioni, come tendono solitamente a sottolineare gli organi di informazione, ma anche la dinamica delle entrate contributive, che spesso viene poco o niente considerata.

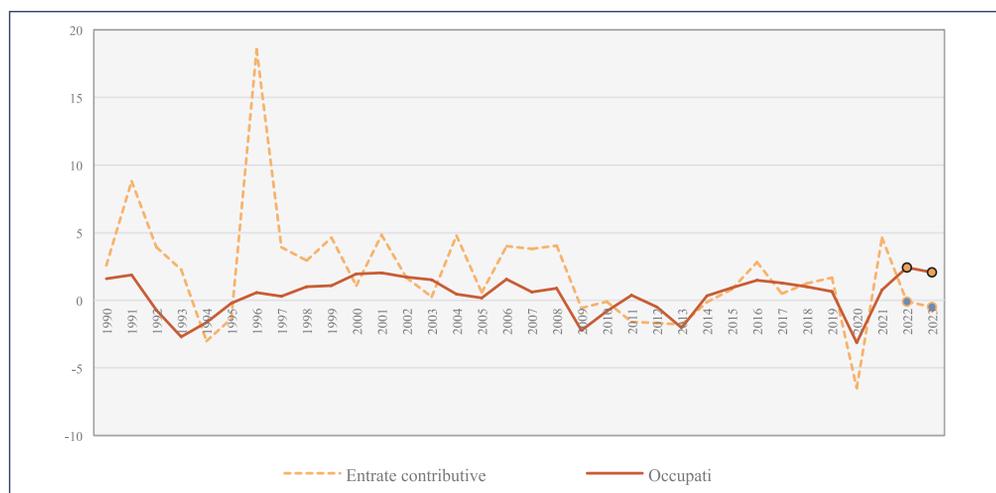
Focalizzando perciò l'attenzione sull'andamento recente delle contribuzioni, si rivela che nel biennio di alta inflazione 2022-2023 i valori delle entrate in termini reali registrano variazioni negative (- 0,1% nel 2022 e -0,5% nel 2023) che si scostano dall'aumento reale medio (+0,62%) nel periodo 2015-2023, nonostante questo valore sia stato condizionato dal dato

10 Significativo è il fatto che il solo recupero di potere d'acquisto dei redditi da pensione del 2021 avrebbe comportato due anni dopo, cioè nel 2023, una spesa pari a quasi 258 miliardi di euro, contro i 267 effettivamente registrati.

11 Se alla spesa per pensioni si aggiunge la quota di spesa assistenziale pari a 43miliardi e 829 milioni, erogata in forma di pensioni e trasferita dallo Stato all'INPS nella Gestione per gli interventi assistenziali (GIAS), la spesa totale sale a 310 miliardi e 937 milioni.

fortemente negativo dell'anno della pandemia. Se si considera poi che l'andamento delle contribuzioni dovrebbe avere una correlazione positiva con la dinamica occupazionale, i dati dell'ultimo biennio risultano comunque difficili da spiegare. Nella **figura 1.2** sono osservabili gli andamenti dei tassi annui di variazione delle contribuzioni in termini reali e dell'occupazione. Come si vede nel primo decennio la relazione è poco chiara perché i frequenti interventi del legislatore hanno ripetutamente agito sulle aliquote contributive dei redditi da lavoro dipendente e autonomo, influenzando con interventi esterni il normale flusso delle contribuzioni. Dall'inizio di questo secolo, la concomitanza tra i segni di variazione del numero di occupati e delle entrate contributive emerge invece in modo più evidente: momenti espansivi dell'occupazione si accompagnano a un'accelerazione delle entrate e al contrario, come negli anni di crisi tra il 2008 e il 2013 o ancor più nell'anno di crollo della pandemia, scendono occupazione e ore lavorate e si riducono o ristagnano le contribuzioni.

Figura 1.2 - Entrate contributive e numero di occupati (tassi reali di variazione annua)



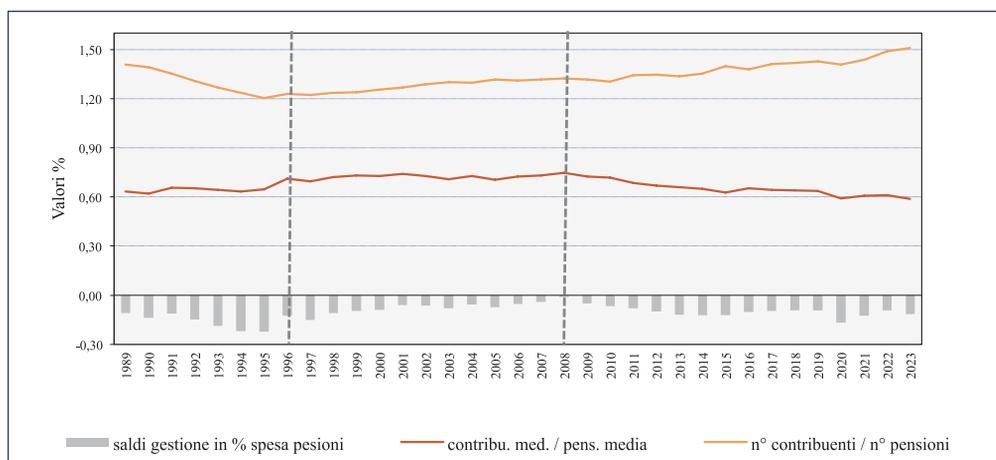
Questa relazione non trova però riscontro negli andamenti dell'ultimo biennio (2022-2023) quando, a fronte di aumenti nel numero di occupati superiori al 2% annuo, si sono avute variazioni negative nei valori reali delle entrate contributive. Poiché il biennio non ha visto modifiche di rilievo nei valori nominali delle aliquote e nella composizione percentuale tra lavoro dipendente e autonomo, le mancate entrate contributive possono essere attribuite a due principali ragioni: la prima riguarda la dinamica dei redditi da lavoro che, in un'improvvisa fase di elevata inflazione hanno tardato ad adeguarsi all'aumento dei prezzi, perdendo valore reale e trasferendo di conseguenza questo calo al valore reale dei contributi versati; una seconda motivazione risiede invece nella rilevazione contabile dell'esonero contributivo previsto dall'articolo 1, comma 281, della Legge di Bilancio 2023, per il quale la contabilità dell'INPS ha istituito un apposito conto nell'ambito della Gestione degli interventi assistenziali (GIAS)¹², riducendo quindi di una cifra equivalente il flusso dei contributi provenienti dalla produzione.

¹² Vedi: INPS, Circolare numero 7 del 24-01-2023. Una tale scelta contabile è discutibile avendo le prestazioni previdenziali diversa natura rispetto alle erogazioni assistenziali. L'argomento è descritto in dettaglio nelle

Ritornando alle dinamiche di lungo periodo, si osserva che nell'arco di trentacinque anni, l'aumento medio annuo della spesa per pensioni in valore nominale è stato del 4,5%, a fronte di una dinamica del PIL nominale nello stesso periodo pari al 3,6% annuo. Nello stesso periodo (1989 - 2023) la spesa assistenziale erogata in forma di pensioni dall'INPS nell'apposita gestione per gli interventi assistenziali (GIAS) è passata da 12,493 miliardi a 43,829, con un aumento medio annuo del 3,7%. Questi differenziali tra le percentuali di aumento della spesa per pensioni e di quella assistenziale hanno definito nel lungo periodo accrescimenti di spesa che nel 2023 erano quattro volte e mezzo il dato iniziale per la spesa pensionistica e 3,5 volte quella assistenziale. A tale proposito, si deve però considerare che le prestazioni assistenziali in oggetto riguardano solo una parte dell'assistenza, quella erogata nella forma di trattamento pensionistico; ad essa si devono sommare diverse altre voci di spesa a carico non solo dell'amministrazione centrale (comprese le decontribuzioni e le agevolazioni contributive) ma anche di quelle locali che portano il totale della spesa assistenziale a carico della fiscalità generale a oltre 160 miliardi, con un tasso medio di crescita rispetto al 2008 del 7% circa.

Con i dati fin qui esaminati, un confronto temporale sull'entità dei saldi di gestione non è però possibile poiché risulta viziato dal fatto che i valori nominali di entrate e uscite risentono della variazione dei prezzi che nel lungo termine ha una forte incidenza. Una misura relativa come il *rapporto percentuale tra disavanzi di gestione e spesa per pensioni* è perciò un indicatore più adeguato a comparare l'entità degli squilibri finanziari.

Figura 1.3 - Saldi di gestione in % della spesa per pensioni



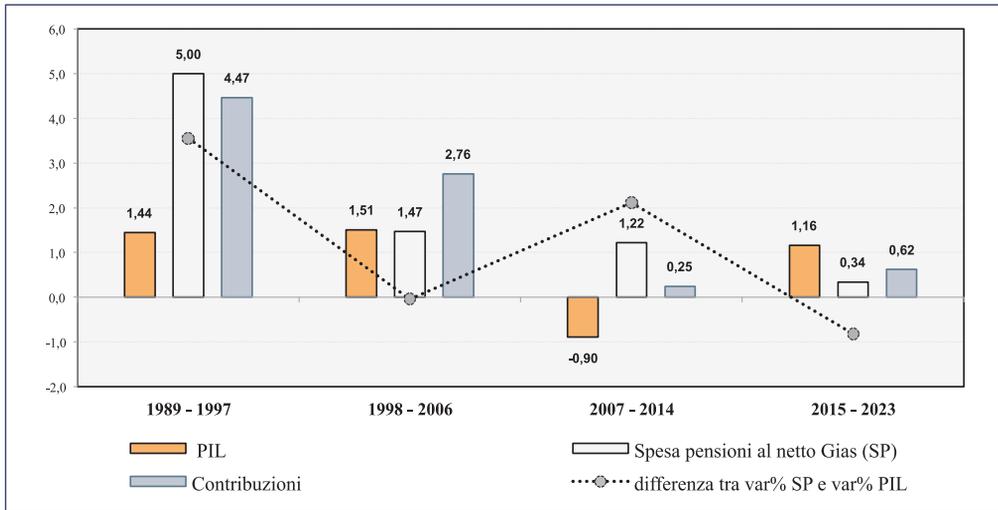
I valori di tale misura, riportati nel grafico di **figura 1.3**, mostrano che rispetto all'andamento dei saldi correnti visto in precedenza l'incidenza sul volume della spesa nel tempo risulta diversa. Infatti, i disavanzi di gestione sono aumentati di peso negli anni della crisi (dopo il 2008) e in una situazione anomala come quella della pandemia (-16,8%

successive parti del presente Rapporto. Elemento distintivo essenziale tra le due tipologie di prestazioni dovrebbe comunque essere che le prime sono finanziate dai contributi dei potenziali beneficiari (direttamente o dai sostituti d'imposta) mentre le seconde sono sostenute dalla fiscalità generale.

nel 2020) ma l'entità degli stessi è stata mediamente più bassa di quanto non fosse prima delle riforme (-22,4% nel 1995) quando la spesa per pensioni registrava tassi di crescita difficilmente sostenibili¹³. Va precisato che il peso dei disavanzi sulla spesa per prestazioni diminuisce quando salgono i valori di due indicatori cruciali per l'equilibrio del sistema, ossia il rapporto tra contribuzione media e pensione media e quello tra numero di contribuenti attivi e numero di pensioni erogate¹⁴. Come si vede dai tracciati, quest'ultimo rapporto che era in peggioramento negli anni precedenti le riforme, dal 1996 presenta una tendenziale risalita che, in parte, è dovuta agli incrementi di occupazione ma che è stata sostanzialmente favorita dagli innalzamenti dell'età pensionabile decisi da più interventi legislativi. Per quanto riguarda il rapporto tra contribuzione media e pensione media, la fase in cui si raggiungono livelli più elevati è quella intermedia, ossia gli anni dopo la riforma del 1995 fino al 2008.

Dopo tale data, la tendenza si inverte per due motivi, da un lato il sostanziale rallentamento della dinamica dei salari e delle relative contribuzioni dovuto alla crisi e alla bassa crescita economica, dall'altro l'ampliamento di quota nei flussi di pensionamento di carriere più strutturate con pensioni medie più alte. Con le stesse suddivisioni temporali, dai tassi medi annui di variazioni della spesa per pensioni, delle contribuzioni e del PIL in **figura 1.4** si possono trarre ulteriori informazioni sui risultati gestionali del sistema previdenziale pubblico. Per avere un confronto in periodi di tempo diversi, evitando di essere influenzati dai tassi di inflazione, tutti i valori sono calcolati in termini reali¹⁵.

Figura 1.4 - Variazioni % medie di periodo in termini reali



13 Tra le misure in vigore prima delle riforme quelle che incidevano maggiormente sulla spesa per pensioni erano: l'applicazione disomogenea del calcolo retributivo, la bassa età di pensione, le baby pensioni dei dipendenti pubblici, i prepensionamenti, l'indicizzazione delle pensioni alla crescita nominale dei salari.

14 Denominando $E = C - Sp$ saldo di gestione, C entrate contributive, Sp spesa per pensioni, L numero contribuenti c contribuzione media, R numero di pensioni erogate, p pensione media, si ha come incidenza del saldo di gestione sulla spesa: $E/Sp = (c/p \cdot L/P) - 1$.

15 I valori reali sono ricavati da Istat nuova serie del PIL a valori concatenati 2020; la spesa per pensioni e le contribuzioni sono deflazionate con l'indice dei prezzi NIC che fa riferimento alla spesa dell'intera collettività.

Come si vede, dal 1989 al 1997, i tassi di variazione reale indicano che l'aumento medio annuo della spesa per pensioni (+5%) è stato di oltre tre volte maggiore di quello del PIL (+1,44%)¹⁶, mentre la dinamica delle contribuzioni (+4,47%), grazie ad una fase di relativa espansione dell'occupazione e alle maggiori aliquote introdotte con la riforma del 1995, è stata molto superiore a quella del PIL ma inferiore alla spesa per pensioni. Con questi andamenti la quota di spesa per pensioni sul valore aggiunto è aumentata e i saldi del bilancio previdenziale sono peggiorati.

Dal 1998 in poi, l'efficacia degli interventi di riforma si è tradotta in un significativo contenimento della dinamica della spesa pensionistica, la cui variazione media reale fino al 2006 è scesa dal 5% all'1,47%, un valore leggermente inferiore a quello di crescita del PIL. In questo stesso periodo, un altro fattore di riequilibrio dei conti è rappresentato dalle contribuzioni che, con aliquote più elevate e una maggiore base imponibile dovuta alla positiva dinamica dell'occupazione, hanno registrato una crescita media annua reale del 2,76%. Tali andamenti hanno determinato una sostanziale stabilità del rapporto tra spesa per pensioni e PIL, oltre che un miglioramento dei risultati di gestione arrivati nel 2008 a una situazione prossima al pareggio.

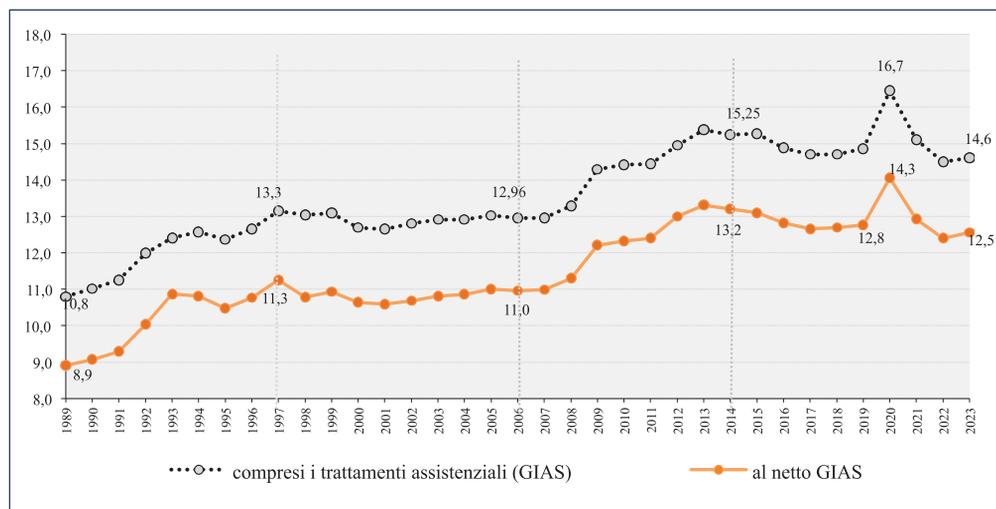
Nel periodo dal 2007 al 2014 vi è stato un ulteriore rallentamento nel tasso medio di crescita della spesa per pensioni (+1,22% in media annua). Lo stesso periodo però è stato caratterizzato da una fase molto avversa dell'economia, con il PIL che in valore reale ha registrato una contrazione media annua del -0,9%. Il connesso calo del numero di occupati, che dal 2008 al 2014 hanno perso 1 milione e 112mila unità pari al 4,8%, ha determinato la stagnazione delle entrate contributive (media annua +0,25%). Da questi dati è derivata una risalita del peso della spesa per pensioni sul valore aggiunto e un nuovo progressivo peggioramento dei saldi di gestione della previdenza.

Nella fase più recente, dal 2015 in poi, la dinamica della spesa per pensioni, nonostante abbia mostrato tassi di crescita annui ulteriormente ridotti (+0,34% in media annua), si è assestata su livelli più alti rispetto al PIL (circa due punti percentuali) di quanto non fosse negli anni precedenti la crisi. Dal 2015 al 2023, pur subendo i pesanti effetti della pandemia nel 2020 (meno 9% il PIL e meno 6,7% le entrate contributive) il PIL è aumentato a un tasso medio annuo reale dell'1,16% e nello stesso periodo le entrate da contribuzione sono salite del'0,6% in media annua. Con tali andamenti, la quota di spesa per pensioni sul PIL, eccetto nel 2020 anno del *lockdown*, non è ulteriormente salita mentre i saldi nei conti della previdenza hanno avuto maggiori oscillazioni.

In **figura 1.5** è rappresentato per l'intero arco di tempo (1989-2023) il rapporto percentuale tra la spesa pensionistica sia al netto sia con l'aggiunta dei trattamenti assistenziali (GIAS) e il PIL, indicatore utile a valutare la sostenibilità finanziaria del sistema pensionistico nel lungo termine.

¹⁶ Nella figura il divario tra tassi di variazione della spesa per pensioni e del PIL è visualizzato dagli indicatori collegati dalla linea tratteggiata.

Figura 1.5 - Spesa per pensioni in % del PIL



Nella figura sono evidenziati gli stessi intervalli di tempo adottati in precedenza per confrontare i tassi medi annui di crescita reale. Nell'intero periodo, si nota che il peso della spesa per pensioni sul PIL va da 10,8% del 1989 a 14,6% del 2023 al lordo GIAS e da 8,9% a 12,5% al netto GIAS. Se si osservano le diverse fasi temporali si vede come il profilo di crescita del rapporto sia molto diverso in ogni periodo. Spinta essenzialmente da una spesa pensionistica in forte accelerazione, nei primi anni la quota di spesa è aumentata notevolmente, passando da 10,8% a 13,3% (da 8,9% a 11,3% al netto GIAS). Le riforme degli anni novanta, tutte orientate al contenimento della spesa pensionistica dopo la crisi economica e finanziaria di inizio decennio¹⁷, hanno avuto un significativo effetto sul rapporto con il PIL che si è stabilizzato nel successivo decennio su valori intorno al 13%, all'11% se si considera la spesa senza le prestazioni assistenziali.

Lo scoppio della crisi monetaria nella seconda metà del 2007 e, soprattutto, l'impatto economico e politico determinato dai problemi di sostenibilità del debito sovrano negli anni immediatamente successivi, hanno accresciuto i dubbi sulla capacità delle misure già introdotte di tenere sotto controllo il peso della spesa pensionistica nel medio/lungo periodo. Su sollecitazione dell'Unione Europea, lo strumento principale per limitare la crescita della spesa previdenziale senza aggravare i rischi di inadeguatezza dei trattamenti fu trovato nell'innalzamento dell'età di ritiro. A tale obiettivo era

¹⁷ Legge n.503/1992 del governo Amato (età e retribuzione pensionabile, requisiti minimi di contribuzione, indicizzazione dei trattamenti dai salari al solo costo della vita, avvio di un processo di armonizzazione dei regimi pensionistici) e la legge n. 335 del 1995 del Governo Dini (ulteriore inasprimento dei requisiti per il pensionamento e adozione graduale del metodo di calcolo contributivo). Nel corso del decennio un ulteriore freno alla dinamica della spesa è venuto dai provvedimenti adottati dal governo Prodi nel 1997 (equiparazione dei requisiti per il pensionamento dei dipendenti pubblici a quelli dei privati e abolizione quasi totale delle baby pensioni), e dalla legge n. 243/2004 (Ministro Maroni) che prevedeva l'innalzamento differito dei requisiti di età anagrafica. Le misure di questa norma, prima di entrare in vigore, furono rese più gradualmente dal cosiddetto "Protocollo welfare" della legge n.247/2007(Ministro Damiano) che ha modificato i requisiti, sostituendoli con un sistema di quote e di aumento graduale dell'età pensionabile da attuare nell'arco di quattro anni.

orientata Legge n.122/2010 (su proposta del Nucleo di Valutazione della spesa previdenziale) che agganciò l'età di pensione agli aumenti delle aspettative di vita. Ma il provvedimento più radicale è quello contenuto nell'articolo 24, D.L. n. 201/2011 del governo Monti (noto come legge Fornero). In quanto parte integrante del decreto "Salva Italia" che includeva misure finalizzate al controllo più generale della spesa pubblica per ridurre i rischi di default finanziario negli anni di crisi del debito sovrano, obiettivo del provvedimento era di intervenire in modo drastico sui requisiti minimi di età e anzianità¹⁸. Pur avendo notevole efficacia nel contenimento della spesa pensionistica, data la gravità della crisi economica, la quota di spesa per pensioni ha ricominciato comunque a salire, arrivando nel 2014 al 15,3% del PIL (13,3% al netto GIAS). Negli anni successivi, con l'economia in leggera ripresa, il rapporto ha avuto un andamento oscillante ma tendenzialmente in leggera decrescita, scendendo fino al 2018, risalendo nel 2019 a causa del sistema di anticipazione all'uscita definito "Quota 100" (articolo 14, D.L. n.4/2019) voluto dal ministro Salvini nel governo Conte, ed esplodendo nel 2020 anno della pandemia in cui molteplici fattori (crollo del PIL e dell'occupazione, calo delle entrate contributive e aumento dei pensionamenti anticipati) hanno determinato un aumento di 1,7 punti percentuali del valore del rapporto tra spesa per pensioni e PIL. Dal 2021, la ripresa dell'attività economica ha riportato il rapporto su valori più allineati alla dinamica degli ultimi anni, ossia su valori vicini a quelli degli anni prima del COVID.

In base al quadro descritto, è da sottolineare che dal 2008 in poi gli andamenti tendenziali e le oscillazioni dell'incidenza delle perdite di esercizio non sono tanto attribuibili alla dinamica della spesa per pensioni, che è sempre declinante e relativamente stabile, quanto all'andamento delle variabili macroeconomiche, PIL, retribuzioni e connesse entrate contributive. Dai grafici nelle figure e dai precedenti dati dell'analisi si possono perciò elencare i seguenti elementi di sintesi:

- a. la variabilità delle entrate contributive è molto maggiore rispetto a quella della spesa pensionistica a causa della loro natura congiunturale, soggetta alla dinamica del PIL reale e al monte ore lavorate, rispetto all'impatto di medio lungo periodo delle variabili, alcune delle quali di carattere normativo, che regolano la spesa per pensioni;
- b. le variazioni della spesa per pensioni rallentano e possono diventare negative negli anni di più elevata inflazione perché l'indicizzazione agisce con un ritardo di un anno, intervallo che può allungarsi con tassi di inflazione crescenti, ed è parziale sul totale della spesa, agendo in misura meno che proporzionale sulle pensioni medie e alte;
- c. in alcuni anni vi sono stati eventi fuori dall'ordinarietà, come l'elevato numero di pensioni liquidate dopo il blocco delle uscite per anzianità nel 1995, il rapido aumento delle entrate contributive nel 1996 derivante dal trasferimento di ali-

¹⁸ L'innalzamento dell'età previsto dalla riforma Fornero è stato in parte frenato da una serie di provvedimenti di "salvaguardia" e da altre misure per consentire il pensionamento ad età più basse, che hanno limitato i risparmi ipotizzati.

quote contributive da altre funzioni verso l'aliquota pensionistica (circa 4 punti percentuali), il forte calo di PIL e occupazione dovuto alla pandemia. Al di fuori di questi eventi "straordinari", la relazione tra entrate contributive e dinamica del PIL diventa un fattore primario nella determinazione dei risultati di gestione dei conti della previdenza. Ovvero, mentre nel periodo iniziale, i tassi di crescita della spesa per pensioni rivelano una maggiore influenza della spesa per pensioni nella determinazione dei disavanzi di gestione, dalla seconda metà degli anni Novanta è soprattutto la dinamica molto ridotta del PIL con i suoi effetti sul livello dei salari e sulle ore lavorate, cioè sulle entrate contributive, a incidere negativamente sui risultati di gestione;

d. partire dalla seconda metà degli anni '90 del secolo scorso le variazioni reali della spesa per pensioni si sono significativamente ridotte rispetto al periodo precedente come effetto delle misure introdotte dalle riforme, in particolare le modifiche al metodo di calcolo, l'aumento dell'età di pensione con il relativo allungamento della vita lavorativa e degli anni di contribuzione, le limitazioni dell'indicizzazione ai prezzi. Nell'ultimo decennio, alcune interferenze sulla riduzione tendenziale dei tassi di variazione della spesa per pensioni sono interamente attribuibili alle misure normative volte a flessibilizzare l'età di pensione in deroga ai requisiti previsti dalla riforma Fornero del 2011.

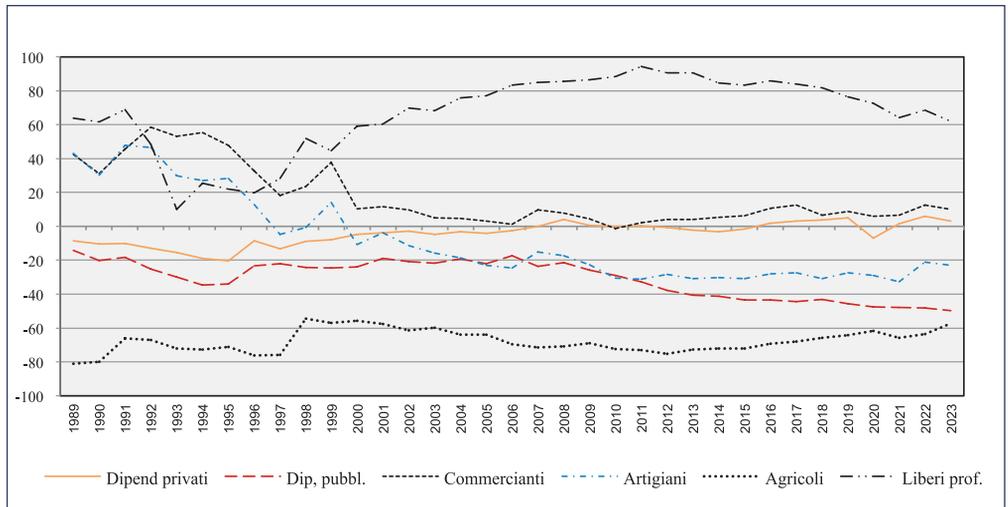
1.5 L'ANDAMENTO DELLE PRINCIPALI GESTIONI PREVIDENZIALI

Pome sottolineato in precedenza, numerosi interventi sul sistema pensionistico hanno avuto l'effetto di contenere la dinamica della spesa che da aumenti annui del 5% in termini reali è scesa a una crescita media dello 0,34% nel periodo 2015-2023. Tuttavia, l'efficacia delle misure di contenimento della spesa non è bastata a raggiungere posizioni di equilibrio di tutte le gestioni, per cui anche negli ultimi anni è stato necessario ricorrere alla fiscalità generale per sostenere la spesa pensionistica non finanziata dalla contribuzione. Sotto questo profilo, è bene però precisare che al risultato generale concorrono situazioni differenti, dal momento che gli squilibri finanziari non riguardano in modo uniforme i fondi delle principali categorie di lavoratori.

Come si vede dalla **figura 1.6**, i diversi profili evidenziano situazioni che si sono modificate negli anni per l'effetto combinato di variabili economiche (occupazione, redditi), demografiche e a seguito di interventi normativi che hanno avuto impatti diversi sulle varie categorie. L'andamento del *Fondo dei dipendenti privati* (FPLD), il maggiore fondo del sistema pensionistico italiano, che prima delle riforme aveva avuto saldi negativi, in

peggioramento fino a oltre il 20% della spesa per pensioni, dal 1995 ha iniziato un progressivo recupero, passando nel 2007 a risultati positivi che da allora si sono mantenuti, salvo una temporanea inversione attribuibile a cali occupazionali nella fase peggiore della crisi e nell'anno della pandemia.

Figura 1.6 - Risultati delle gestioni previdenziali per categoria (saldi in % della spesa per pensioni al netto GIAS)



Attiva è anche la gestione del *Fondo dei commercianti* che, pur vedendo i contribuenti diminuire dal numero massimo raggiunto nel 2013, include tuttora la categoria più numerosa del lavoro autonomo. Negli anni analizzati i saldi hanno avuto una contrazione rispetto ai valori iniziali, poiché il naturale invecchiamento del fondo nato nel 1961 ha reso sempre più critico l'ottenimento del pareggio tra le entrate contributive e la spesa per pensioni. Il declino del rapporto tra contribuzioni e pensioni erogate ha avuto il momento più critico nel 2010 con un risultato negativo. Da tale anno, con le riforme messe in atto, i saldi pur oscillando sono ritornati a valori positivi che in alcuni momenti hanno superato il dieci per cento delle prestazioni erogate.

L'elenco delle gestioni attive include anche le *Casse dei professionisti*, ossia i fondi obbligatori della previdenza privata, arrivate nel 2023 ad avere 1,327 milioni di iscritti attivi e ad erogare quasi 503mila pensioni¹⁹. La differenza tra numero di contribuenti e pensioni in essere, oltre a un rapporto tra i valori medi di contribuzione e pensione superiore di circa l'11% a quello dell'intero sistema pensionistico sono le ragioni per cui l'insieme delle gestioni ha mostrato in tutto l'arco di tempo avanzi rilevanti. Va però rilevato che le singole Casse presentano un quadro contabile piuttosto differenziato dovendo af-

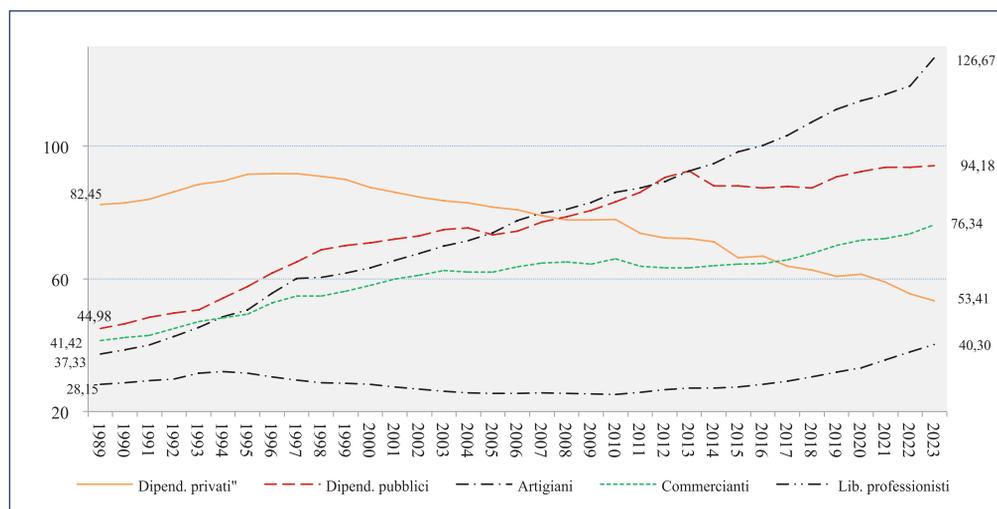
¹⁹ Tra le gestioni attive sono da includere anche: la *Gestione separata* INPS per i lavoratori parasubordinati assimilabili che nel 2023 avevano 1,592 milioni di iscritti e 586,5mila pensioni erogate; i *Fondi integrativi* INPS (Fondo Esattoriali, Fondo Addetti alle Miniere, Fondo Enti Disciolti e Fondo per il personale del consorzio autonomo del porto di Genova e dell'ente autonomo del porto di Trieste); i *Fondi Integrativi* delle Casse 509, ovvero Enpaia, Fasc ed Enasarco che, nel 2023 totalizzavano 586,5mila assicurati e 166,3mila trattamenti erogati. Le ragioni per cui le gestioni di questi fondi sono in attivo sono da attribuire al fatto che esse hanno rapporti ancora contenuti tra numero di contribuenti e numero di pensioni erogate, oltre che erogazioni medie relativamente basse rispetto ai livelli medi delle altre categorie.

frontare problematiche diverse e, inoltre, che dal 2011 al 2023 l'incidenza degli avanzi di esercizio sulla spesa sostenuta per erogare le pensioni dell'intero aggregato delle Casse professionali è scesa dal 94,4% al 62%²⁰.

Le restanti categorie hanno invece situazioni più critiche che sono peggiorate o hanno avuto fasi oscillanti, mantenendo però disavanzi significativi. Sotto questo profilo, la categoria che più rileva per dimensione è quella dei *dipendenti pubblici*. Dopo un periodo abbastanza lungo in cui aveva registrato saldi negativi intorno al 20% dell'ammontare delle pensioni erogate, dal 2008 i fondi del settore pubblico hanno visto un progressivo aggravamento dei risultati negativi con un importo di 30,6 miliardi nel 2023 equivalente al 49,8% delle prestazioni a carico del fondo, e che da solo vale quasi una volta e mezzo il disavanzo dell'intero sistema pensionistico.

In tendenziale peggioramento è anche la situazione del *Fondo degli Artigiani* che, dal 2000 in poi, con l'aumento del numero delle pensioni erogate e la riduzione dei contribuenti attivi, pur avendo un valore medio delle prestazioni relativamente basso, ha visto salire il peso dei disavanzi di gestione a oltre il 30% sul valore delle pensioni erogate, con un leggero miglioramento solo nell'ultimo biennio. Le enormi trasformazioni strutturali avviate dall'immediato dopoguerra hanno avuto effetti molto evidenti sul *Fondo dei coltivatori diretti coloni e mezzadri (CDCM)*, che ha dovuto erogare un numero crescente di pensioni a fronte di una platea di contribuenti attivi in continua contrazione. Nel 2023 le pensioni liquidate sono state ancora 2,8 volte il numero dei contribuenti attivi, dopo che nel 2007 questo rapporto aveva raggiunto un valore pari a 3,7. La frammentarietà delle giornate di lavoro determina inoltre, contribuzioni relativamente basse e di conseguenza pensioni altrettanto basse, da sempre sostenute per oltre la metà dell'importo da trasferimenti GIAS, ma che in prospettiva, applicando il metodo di calcolo contributivo, rischiano di essere per una larga parte degli assicurati inferiori a livelli minimi di adeguatezza.

Figura 1.7 - Rapporto % tra numero di pensioni e numero di contribuenti



²⁰ L'argomento delle Casse professionali, in aggregato e per singola Cassa, è trattato in un successivo capitolo del presente Rapporto.

Nella **figura 1.7** sono riportati i valori del rapporto tra numero di pensioni erogate e numero di contribuenti attivi suddivisi per le categorie di cui si è parlato, ad eccezione del *fondo degli agricoltori* (CDCM) il cui rapporto ha valori troppo elevati per essere contenuti nel grafico e che peraltro sono già stati richiamati nel testo. La misura di questi rapporti, che esprime il carico di prestazioni in essere che ricade su ogni singolo lavoratore attivo assicurato, è molto significativa per capire le cause che determinano il livello di criticità delle varie gestioni. Merita sotto questo profilo sottolineare le differenti evoluzioni dei due fondi di maggiori dimensioni, i dipendenti privati (15,8 milioni di contribuenti) e i dipendenti pubblici (3,35 milioni di iscritti). Per quanto riguarda i *dipendenti privati*, il rapporto dal 1989 al 2023 è sceso da 82,45 a 53,41, equivalente a poco più di una pensione erogata per ogni due contribuenti, e i risultati di gestione, salvo qualche fluttuazione, dopo il 2007 sono tornati ad essere stabilmente positivi. Per i *dipendenti pubblici* la situazione è rovesciata: partiti da un rapporto che corrispondeva a una pensione erogata ogni 2,2 contribuenti attivi, il valore nel 2023 (94,18) indica che si è ormai prossimi ad una pensione liquidata per ogni lavoratore attivo, con evidenti effetti sui saldi di gestione che sono in continuo peggioramento.

Una situazione divenuta assai critica è anche quella del *fondo degli artigiani*, categoria che dal 2008 al 2023 ha perso 487mila lavoratori attivi, pari al 25,5% del dato iniziale. Con un numero di pensioni liquidate in costante aumento (nel 2023 sono 1,793 milioni), il rapporto tra i trattamenti in essere e i contribuenti è salito a 126,67, il più alto di tutte le categorie. Al momento meno problematica risulta la gestione del *fondo dei commercianti* che nel 2023 ha registrato un rapporto tra numero pensioni e numero contribuenti pari a 76,34. Tuttavia, è da rilevare che dal 2013 anche il numero di lavoratori autonomi attivi nel commercio ha avuto un sensibile calo perdendo oltre 230mila unità, circa il 10% del dato iniziale. Questa contrazione si è riflessa sul rapporto con il numero delle pensioni in essere, salito di oltre dieci punti, con la prospettiva di future difficoltà anche sui saldi di gestione che nell'ultimo anno però sono risultati ancora attivi.



1.6 LE ALIQUOTE TEORICHE DI EQUILIBRIO CONTABILE NEI 35 ANNI DI MONITORAGGIO

L'equilibrio finanziario di ogni singola gestione pensionistica può essere misurato anche ricorrendo alle cosiddette "aliquote teoriche di equilibrio contabile". Esse presentano il valore che dovrebbe assumere l'aliquota di contribuzione per avere un pareggio tra entrate e uscite per prestazioni. In altri termini, una gestione pensionistica ha un saldo nullo quando l'aliquota di equilibrio contabile e l'aliquota corrente

coincidono. Invece quando il fondo registra un avanzo o disavanzo di gestione l'aliquota teorica di equilibrio è rispettivamente minore o maggiore dell'aliquota corrente²¹.

Nella **tabella 1.1** è presentato il quadro disaggregato dei fondi delle diverse categorie di contribuenti per gli anni 2022 e 2023²². Per ciascun anno nella prima colonna sono riportati i valori delle aliquote teoriche di equilibrio contabile (**\hat{a}**), nella seconda e terza colonna vi sono i due rapporti che ne definiscono il valore e nella quarta colonna le differenze (**d**) tra le stesse aliquote di equilibrio e le aliquote correnti. I valori **d** con segno positivo indicano le categorie che hanno avanzi di gestione e che otterrebbero risultati in pareggio anche con aliquote inferiori a quelle attuali. All'opposto i valori **d** negativi dicono di quanto le aliquote correnti andrebbero aumentate per avere una situazione di equilibrio contabile²³.

Tabella 1.1 – Aliquote teoriche di equilibrio contabile (*)
(rapporti tra pensione e reddito medi, tra numero di pensioni e contribuenti e differenza con aliquote correnti)

Categorie	2022					2023				
	\hat{a}	p/w	R/L	q	d	\hat{a}	p/w	R/L	q	d
Dipendenti Privati	32,9	55,02	59,75	0,98	-0,63	33,8	63,28	53,41	0,95	-1,57
Fondo Pensioni Lavoratori Dip.	29,0	51,69	56,14	1,11	3,33	29,9	60,18	49,67	1,08	2,44
Istituto Giornalisti	63,1	67,80	93,13	0,54	-29,36	60,7	87,56	69,30	0,55	-27,55
Ente Lavoratori Spettacolo	18,4	38,08	48,39	1,35	6,50	18,4	49,28	37,25	1,41	7,48
Dipendenti Pubblici	53,3	93,58	56,99	0,63	-19,61	55,7	59,17	94,18	0,62	-21,28
Cassa Dipendenti Enti Locali	63,4	100,98	62,81	0,53	-30,09	67,6	65,72	102,89	0,50	-33,75
Cassa Insegnanti di Asilo	56,0	73,31	76,37	0,60	-22,49	59,8	77,04	77,57	0,54	-27,45
Cassa Sanitari	55,2	76,70	72,00	0,62	-21,19	58,2	74,02	78,60	0,58	-24,50
Cassa Ufficiali Giudiziari	54,2	98,24	55,20	0,65	-18,85	60,8	50,09	121,43	0,54	-28,14
Dipendenti dello Stato	47,9	90,49	52,98	0,71	-14,07	49,1	54,39	90,22	0,71	-14,20
Lavoratori autonomi	30,2	113,75	26,54	0,84	-4,75	32,2	27,32	117,91	0,84	-5,02
Fondo Artigiani	33,3	118,19	28,15	0,76	-7,97	37,5	29,63	126,67	0,74	-9,69
Fondo Commercialisti	23,4	73,68	31,81	1,09	2,23	25,2	33,07	76,34	1,07	1,76
Fondo CDCM	67,1	283,90	23,64	0,36	-42,79	57,5	20,38	281,99	0,43	-33,04
Liberi Professionisti	11,0	37,93	29,05	1,68	7,52	14,5	36,01	40,30	1,62	8,96
Casse priv. 509 (escluso ENPAM)	10,9	24,48	44,34	1,82	8,93	16,2	63,50	25,52	1,88	14,33
ENPAM	12,9	79,96	16,19	1,30	3,91	15,2	17,53	86,65	1,11	1,73
Casse priv. 103	2,1	11,74	18,08	8,15	15,18	2,3	18,80	12,32	7,43	14,89
Gestione Parasubordinati	4,9	35,90	13,71	5,60	22,65	5,5	14,83	36,84	4,95	21,58
Totale Integrativi	15,5	53,49	28,89	1,01	0,17	15,3	28,76	53,12	1,01	0,16
Totale obbligatorio	32,9	67,20	48,94	0,92	-2,70	34,5	52,06	66,31	0,90	-3,54

(*) Non sono riportati i valori relativi ai fondi che sono confluiti nell'INPS senza evidenziazione separata delle relative gestioni

21 Per aliquota corrente si intende la contribuzione media (**a**) a cui sono assoggettati i redditi da lavoro (**$Y = w.L$**), dove **w** è il reddito medio e **L** è il numero dei lavoratori attivi e definendo le altre variabili come: entrate contributive (**C**); spesa per pensioni (**SP**); aliquota teorica di equilibrio contabile (**\hat{a}**); pensione media (**p**); numero di pensioni erogate (**R**); quota di spesa per pensioni finanziata con contribuzione (**q**). Se si considerano solo i flussi pensionistici, escludendo oneri amministrativi, rendite patrimoniali e le voci assistenziali finanziate dalla GIAS, si ha equilibrio nella gestione quando le entrate contributive pareggiano le spese per pensioni, cioè **$C = SP$** ovvero **$\hat{a}.w.L = p.R$** , da cui si ricava l'aliquota teorica di equilibrio contabile **$\hat{a} = p/w \cdot R/L$** . Essendo **$q = (a.L.w)/(p.R)$** , si vede inoltre come tra aliquota corrente e aliquota di equilibrio contabile intercorra la seguente relazione **$a = \hat{a}.q$** e che, quindi, i punti percentuali di differenza tra aliquota corrente e aliquota contabile sono pari a **$d = \hat{a} (q-1)$** .

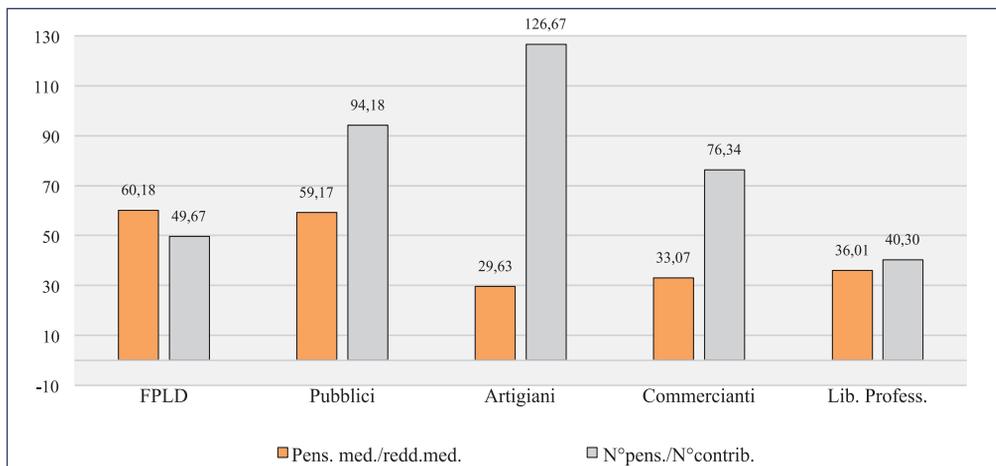
22 Per avere informazioni sull'evoluzione di lungo periodo di queste variabili, si può vedere pag. 55 dell'ultimo Rapporto di Itinerari Previdenziali (*Il Bilancio del Sistema Previdenziale italiano Andamenti Finanziari e demografici delle pensioni e dell'assistenza per l'anno 2022*, Rapporto N. 11, Milano, gennaio 2024) dove è riportato un confronto delle aliquote di equilibrio a cadenza decennale dal 1992 al 2022.

23 Per valutare la congruità di questi valori ai fini dell'equilibrio finanziario delle gestioni, va ricordato che l'aliquota di contribuzione per i lavoratori dipendenti privati e pubblici è il 33%, mentre per le diverse categorie del lavoro autonomo l'aliquota di riferimento si colloca tra il 24% e il 25%, ad eccezione dei collaboratori parasubordinati nel caso in cui non abbiano altro rapporto di lavoro coperto da previdenza e non siano già pensionati.

Prima di osservare le significative differenze esistenti tra i vari fondi, è bene concentrare l'attenzione sull'ultima riga della tabella che sintetizza i dati dell'insieme dei fondi che compongono il sistema previdenziale obbligatorio italiano. Come si vede, il valore dell'aliquota contabile di equilibrio nel 2023 è stato pari a 34,52%, cioè 3,54% maggiore dell'aliquota media corrente, che può anche essere interpretata come la percentuale di prelievo sull'insieme dei redditi da lavoro occorrente per avere un pareggio tra entrate contributive e spesa per pensioni. Se si considera che nello stesso anno l'insieme dei redditi assoggettati al prelievo contributivo era di circa 725,09 miliardi di euro, il divario tra le aliquote corrisponde a 25,7 miliardi di euro, cioè una cifra inferiore di circa 4,7 miliardi rispetto ai 30,4 di saldo negativo ottenuto dalla somma dei risultati di gestione dei singoli fondi al netto dei trasferimenti assistenziali.

Cominciando dalla categoria più numerosa del sistema pensionistico, ovvero il Fondo dei lavoratori dipendenti (FPLD) che nel 2023 rappresentava il 58,4% dei contribuenti e il 43,7% delle pensioni liquidate, si possono fare due considerazioni. La prima, più importante, è che nel 2023 l'aliquota corrente, cioè il rapporto tra entrate contributive e spesa per pensioni, è rimasto superiore all'aliquota teorica di equilibrio. È quindi continuato un percorso di risultati di gestione positivi che, come detto in precedenza, ha avuto inizio dopo il 2007. Il risultato, frutto soprattutto dell'innalzamento dell'età effettiva di pensionamento ottenuta con vari interventi di riforma, è da considerare ancora più degno di nota se si tiene conto che dal 1996 in diversi momenti sono confluiti nel FPLD altri fondi che all'atto dell'inclusione avevano situazioni finanziarie assai squilibrate²⁴. La seconda considerazione riguarda il valore dell'aliquota di equilibrio nel passaggio dal 2022 al 2023 che è salito per l'effetto combinato di una diminuzione della quota di pensioni sul numero totale di contribuenti non sufficiente a compensare il ragguardevole balzo all'insù del rapporto tra pensione media e salario medio: aumento anomalo dovuto in larga parte ai differenti tempi di adeguamento all'inflazione delle retribuzioni salite solo del 2,5% e delle pensioni che, nonostante i ritardi del meccanismo di perequazione, sono cresciute del 9,9%.

Figura 1.8 - Rapporti determinanti dell'aliquota di equilibrio (valori percentuali)



24 Tra i fondi confluiti in situazioni di bilancio molto compromesse si possono citare: Fondo Trasporti, Fondo Elettrici, Fondo Volo, Dipendenti FF.SS., Istituto Dirigenti di Azienda, Poste e Telefoni ex IPOST.

La **figura 1.8** mette in evidenza le notevoli differenze riscontrabili tra le principali categorie di lavoratori nei rapporti che determinano il valore dell'aliquota teorica di equilibrio. Prendendo a riferimento i dipendenti privati che fanno capo al FPLD, fondo che, come detto, presenta un'aliquota effettiva maggiore ma assai vicina all'aliquota teorica di equilibrio contabile, si notano chiaramente scarti positivi e negativi rispetto a questo *benchmark*. Il lavoro dipendente, privato e pubblico, appare avere livelli di pensione simili e relativamente elevati (circa il 60%) rispetto alle retribuzioni. I pubblici hanno però quote di pensioni liquidate rispetto ai contribuenti che superano il 94% e che determinano aliquote di equilibrio che in media eccedono di oltre 20 punti percentuali le aliquote correnti, con situazioni più critiche per i dipendenti degli Enti Locali rispetto ai dipendenti dello Stato.

Tutti gli autonomi, per effetto dei loro livelli di contribuzione più bassi rispetto ai lavoratori dipendenti, hanno rapporti di minore entità tra pensioni medie e redditi medi (dal 26,6% al 36%). Le aliquote di equilibrio e i conseguenti avanzi o disavanzi gestionali vengono a dipendere soprattutto dal rapporto tra contribuenti attivi e pensioni erogate. In tal senso, si vede come la situazione dei fondi dei liberi professionisti è tuttora stabilmente attiva²⁵, i commercianti sono in una condizione di pareggio, però con un differenziale di aliquote tra l'attuale e quella di equilibrio ridotto all'1,76%, e il fondo degli artigiani, cioè il fondo con la situazione più sbilanciata tra pensioni erogate e contribuenti attivi, che registra un disavanzo crescente, fotografato da uno scarto tra aliquota di equilibrio e aliquota corrente che nel 2023 è salito rispetto al 2022 dal 7,97% al 9,69%.

Tabella 1.2 - Sintesi dei 35 anni di analisi

Indicatori		1989-2023			1989-1997			1998-2006			2007-2014			2015-2023		
		importi (miliardi di euro)	Variazioni		importi (miliardi di euro)	Variazioni		importi (miliardi di euro)	Variazioni		importi (miliardi di euro)	Variazioni		importi (miliardi di euro)	Variazioni	
			valore assoluto	var. % media annua		valore assoluto	var. % media annua		valore assoluto	var. % media annua		valore assoluto	var. % media annua		valore assoluto	var. % media annua
Spesa per pensioni	inizio	58.862			58.862			112.662			177.540			217.897		
	fine	267.107	208.245	4,42	122.948	64.086	8,53	170.210	57.548	4,69	216.112	38.572	2,49	238.763	20.866	1,02
Spesa assistenziale	inizio	12.493			12.493			19.711			31.766			36.045		
	fine	43.829	31.337	3,65	18.692	6.199	4,58	30.913	11.201	5,13	33.356	1.590	0,61	40.228	4.184	1,23
Entrate contributive	inizio	52.443			52.443			98.475			170.523			191.335		
	fine	236.686	184.243	4,40	80.349	27.905	4,85	161.411	62.936	5,64	189.591	19.067	1,33	208.264	16.929	0,95
PIL	inizio	660.501			660.501			1.045.873			1.614.840			1.655.355		
	fine	2.128.001	1.467.500	3,40	987.615	327.114	4,57	1.552.687	506.814	4,49	1.627.406	12.566	0,10	1.782.050	126.695	0,82
N. Attivi contribuenti	inizio	21.217			21.217			21.785			24.256			24.791		
	fine	26.205	4.988	0,61	21.524	307	0,16	23.976	2.190	1,07	24.172	-84	-0,04	26.205	1.415	0,62
N. Pensioni	inizio	15.000			15.000			17.652			18.438			17.744		
	fine	17.377	2.377	0,42	17.630	2.629	1,81	18.290	638	0,40	17.870	-568	-0,39	17.377	-367	-0,23
Inflazione (Prezzi NIC n. indice 1989=100)	inizio	100	ass.	media %	100	ass.	media %	147,0	ass.	media %	179,0	ass.	media %	202,8	ass.	media %
	fine	212,1	112,1	2,17	144,2	44,2	4,15	175,8	29	2,01	203,0	24	1,58	212,1	9	0,50
Rapporto % Pensioni/contribuenti	inizio	70,7			70,7			81,0			76,0			71,6		
	fine	66,3	-4,4	-0,18	81,9	11,2	1,65	76,3	-4,7	-0,67	73,9	-2,1	-0,35	66,3	-5,3	-0,85

25 Nell'aggregato delle Casse professionali, come si vede nella *Tabella 1*, una situazione gestionale attiva ma non così solida è quella rinvenibile per l'ENPAM che ha un rapporto molto elevato di pensioni in essere rispetto ai contribuenti attivi. Più dettagli sulla situazione delle singole Casse professionali sono mostrati in un altro capitolo del presente Rapporto.



SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

(a cura di Elisabetta Boccia)

Giorgio Di Giorgio, Alessandro Pandimiglio, Guido Traficante,
Nelle tasche degli italiani. Il debito pubblico spiegato bene. Come funziona, come liberarcene.

Nei quindici anni che vanno dal 2007 a dopo la pandemia del Covid-19, il rapporto debito-Pil è cresciuto in modo significativo in molti paesi, raggiungendo valori spesso superiori al 100-110%: in Italia ha superato il 150%, in Giappone il 250%. Un debito elevato vincola il destino delle generazioni future limitandone le opportunità economiche e finanziarie; aumentano le tasse, diminuendo i servizi pubblici erogati dallo Stato, minando conseguentemente la stabilità finanziaria.

Pur aggiungendosi alla copiosa letteratura sul tema, il volume si pone l'obiettivo di divenire uno strumento divulgativo e facilmente accessibile a tutti. "In questo testo – precisano gli autori nella prefazione– ci siamo sforzati di parlare in modo rigoroso ma non "tecnico", e di illustrare sia i rischi associati a una crescita eccessiva del debito e sia le decisioni da assumere per controllarne la dinamica e ricondurre il rapporto debito-Pil a valori fisiologici e non pericolosi".

In Italia le decisioni da prendere su questo tema devono essere necessariamente inquadrare nel nuovo contesto del modificato "Patto di Stabilità e Crescita" e richiede di concordare con la Commissione Europea dei piani di riduzione del rapporto debito-Pil in un periodo compreso dai quattro ai sette anni.

"Il rapporto debito-Pil pari a circa il 140%, a fine 2023, – si legge ancora nella prefazione– costituisce il principale problema dell'Italia, impone vincoli alle decisioni politiche dei governi attuali e futuri e condiziona la vita dei cittadini, oggi e domani. Questi devono accontentarsi di servizi pubblici erogati in modo inefficiente e limitato e sono costretti a pagare tasse elevate per remunerare gli interessi del debito contratto dalle generazioni precedenti.

La riduzione del rapporto debito-Pil richiederebbe una crescita economica maggiore di quella stimata nei prossimi anni per il nostro paese, e una inflazione più elevata rispetto a quella considerata, per molti altri seri motivi, desiderabile dalle banche centrali. Queste due variabili macroeconomiche, crescita e inflazione, sono abbastanza poco sotto il

controllo stretto della politica nazionale, almeno nel breve periodo. Lo strumento a disposizione è invece costituito dal cosiddetto avanzo primario, la differenza tra le entrate e le spese della pubblica amministrazione al netto degli interessi da pagare sul debito pubblico. Il conseguimento di avanzi primari di bilancio richiede quindi di garantire che il gettito derivante dalle entrate fiscali (le tasse) si mantenga sempre superiore al totale spese del settore pubblico (per i servizi, come sanità, istruzione, trasporti etc.) al netto della spesa per gli interessi sul debito cumulato in precedenza (pari a circa 80 miliardi di euro nel 2023, e prevista in crescita nel prossimo triennio, fino a superare i 100 miliardi nel 2026)”.

Questo l'amaro prezzo da pagare dovuto principalmente agli errori dei governi a larga coalizione degli anni Settanta e Ottanta.

Le decisioni fiscali oltre ad essere concordate con la Commissione Europea devono essere integrate con una politica fiscale e bilancio comune, così come suggerito dai programmi SURE e Next Generation EU, durante la pandemia da Covid-19. Affinché il continente europeo possa continuare ad avere un ruolo nella geopolitica del futuro, occorre rafforzare l'impegno per la realizzazione di uno spazio fiscale comune nell'UE. “La separazione geografica tra le aree di azione della politica monetaria e di quella fiscale costituisce un ostacolo e uno svantaggio in termini di capacità di rispondere in modo efficace agli *shock* macroeconomici: la *performance* comparata tra i risultati di stati Uniti ed Eurozona nelle ultime due decadi ne dà piena evidenza”.

L'obiettivo primario di questo volume, in sintesi, è quello di spiegare ai cittadini come non credere a promesse ingannevoli, provenienti da una parte politica o dall'altra, laddove è necessario acquisire una più diffusa consapevolezza civica delle scelte che “come Paese, ma anche come europei siamo chiamati a prendere oggi per non dover assumere decisioni molto più dolorose domani”.

Realizzazione grafica, impaginazione e stampa
Mengarelli Grafica Multiservice

Finito di stampare Febbraio 2025



